

Capitolul 3

Măsurarea fluxului

3.1 Mărimile de măsurat

3.1.1 Unitățile măsurărilor de flux

Cantitatea de flux este măsurată de obicei prin debit sau rata (variația în timp) volumului de flux; aceasta reprezintă viteza cu care volumul de flux traversează o suprafață. În sistemul internațional (SI), unitatea debitului Φ este m^3/s , dar în măsurările fiziologice se folosesc de obicei unități cum sunt: litru pe secunda (ℓ/s), litru pe minut (ℓ/min) sau mililitru pe minut ($\text{m}\ell/\text{min}$). Se poate folosi și rata masei de flux, care corespunde ratei cu care o masă traversează o suprafață. Unitatea ratei de masă în SI este kg/s .

Atunci când un fluid, cum este sângele, este furnizat sau drenat uniform dintr-un țesut, cantitatea de flux este de obicei măsurată ca rata volumului de flux pe unitatea de masă a țesutului. În SI, unitatea este $\text{m}^3/\text{s}\cdot\text{kg}$ dar în măsurările fiziologice se folosește $\text{m}\ell/\text{min}\cdot 100\text{g}$. În mod similar, se poate considera rata volumului de flux pe unitatea de volum a țesutului care reprezintă numărul de treceri ale fluidului în unitatea de timp; astfel, unitățile sunt s^{-1} , min^{-1} etc. De asemenea fluxul poate fi caracterizat prin viteza fluxului. Unitatea de viteză în SI este m/s .

Dacă viteza fluxului nu este uniformă, atunci apare un gradient al fluxului care este dat de derivata vitezei în raport cu o anumită coordonată. Într-un fluid vâscos, apare o forță tangențială, numită tensiune de forfecare, care este proporțională cu gradientul vitezei. Cu alte cuvinte, atunci când viteza fluxului $U(z)$ are un gradient de viteză, $dU(z)/dz$ în direcția z , tensiunea de forfecare poate fi reprezentată prin:

$$\tau = \mu \frac{dU(z)}{dz} \quad (3.1)$$

unde μ este vâscozitatea fluidului care este o constantă într-un fluid incompresibil. Unitatea tensiunii de forfecare în SI este pascal (Pa) și aceea a vâscozității este $\text{Pa}\cdot\text{s}$. În măsurările fiziologice, pentru

vâscozitate în mod obișnuit se folosesc P (poise) și cP (centipoise) care reprezintă:

$$1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad (3.2)$$

$$1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad (3.3)$$

Pentru un flux care are viteza medie \bar{U} , într-un tub cu secțiunea trasversală circulară cu diametrul interior d , se definește cantitatea Re :

$$Re = \frac{\rho \bar{U} d}{\mu} \quad (3.4)$$

numită numărul lui Reynold, unde ρ este densitatea fluidului. Numărul lui Reynold este o cantitate adimensională.

Pentru un flux de gaze, debitul poate fi definit în același mod ca pentru un lichid. Totuși, gazul este compresibil și dilatarea termică este neneglijabilă în condițiile multor măsurări fiziologice. Astfel, nu se poate identifica exact conținutul molar al gazului sau conținutul de gaz care traversează o suprafață din volumul său. Pentru măsurări precise trebuie identificate cel puțin presiunea și temperatura. Conținutul relativ al compoziției gazului poate fi afectat și de modificările în presiunea vaporilor de apă.

În general, orice volum sau debit al fluxului pot fi convertite în cantități măsurate în condiții standard de temperatură, presiune și uscăciune care corespund la 0°C , 101.325 kPa (1 atm) și presiune de vaporii zero.

În măsurările respiratorii se folosesc uneori condiții care diferă de cele standard. Condițiile tipice pentru temperatura corpului sunt presiunea ambiantă și presiunea vaporilor de apă saturați, și temperatura ambiantă și presiunea vaporilor de apă saturați.

3.1.2 Domeniile de măsură ale fluxului

Debitul Φ ca și viteza medie \bar{U} a sângelui într-un vas de sânge pot fi approximate numai grosier în funcție de dimensiunea vasului, deoarece

aceasta variază adaptându-se debitului sangvin. În sistemul arterial real există o corelație între debitul sângelui (și a vitezei) și diametrul arterei. Debitul de sânge este proporțional aproximativ cu puterea a treia a diametrului vasului, în timp ce viteza sângelui este aproximativ proporțională cu diametrul arterial. Raportul debitelor într-o arteră mare cu diametrul în jur de 2 cm și un capilar de 6 μm este mai mare de 10^9 , iar cel al vitezelor este de aproximativ 2 000. Nu este aplicabilă nici o metodă de măsură pentru întreg domeniul de variație a debitului sau a vitezei medii. De aceea, pentru diferitele domenii ale debitului și vitezei trebuie folosite metode diferite.

Într-un vas de sânge sau pe orice traiect care conține un fluid în mișcare, viteza fluidului nu este uniformă pe secțiunea transversală, ci are o distribuție de viteze. Dacă traiectul este un tub drept lung cu o secțiune transversală circulară și dacă se presupune că fluxul este staționar și laminar, atunci profilul vitezei este parabolic, așa cum se arată în Fig. 3.1. Viteza la o poziție aflată la o distanță r față de centrul tubului este dată de:

$$U(r) = U_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.5)$$

unde R este raza internă a tubului, iar U_m este viteza maximă.

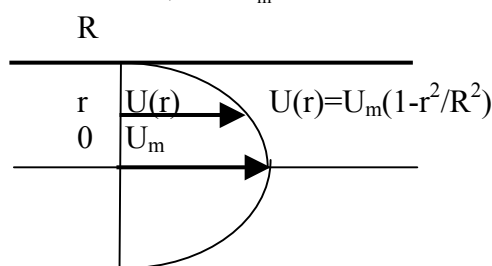


Fig. 3.1

Astfel, rata fluxului sau debitul Φ este:

$$\Phi = \int_0^R U(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{2} \pi R^2 U_m = \pi R^2 \bar{U} \quad (3.6)$$

Debitul Φ împărțit la aria secțiunii transversale πR^2 este viteza medie \bar{U} dată de $U_m / 2$, $\left(\bar{U} = \frac{1}{2} U_m\right)$ adică viteza medie este chiar jumătate din viteza maximă, atunci când profilul vitezei este parabolic.

Atunci când debitul nu este staționar, ci pulsativ profilul vitezei diferă de unul parabolic. Într-o arteră mare, pot apărea pentru scurt timp viteze foarte mari, astfel încât fluxul prezintă turbulențe. Dacă există unele obstrucții ale arterei, de asemenea vor apărea turbulențe. Chiar în fluxurile turbulente pot fi măsurate debitele prin metode adecvate, dar nu se pot stabili exact profilurile vitezelor.

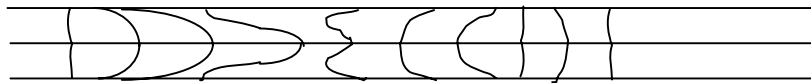


Fig. 3.2

Dacă un flux este pulsativ, profilul vitezei variază ca formă periodic în timp. În Fig. 3.2 sunt date profilurile de viteză, tipice într-o arteră în timpul unui ciclu cardiac. Componenta “înapoi” a vitezei este observată chiar în artere mici iar la măsurarea vitezei instantanee este necesar de cunoscut decelerarea pe direcția fluxului.

3.2 Măsurarea fluxului de sânge în vasele de sânge

3.2.1 Măsurarea fluxului de sânge în artere și vene

În această secțiune sunt prezentate diferite principii ale metodelor de măsurare a fluxului de sânge în artere și vene, precum și aplicațiile adecvate pentru fiecare metodă.

3.2.2 Fluxmetru electromagnetic

3.2.2.1 Principiu

Fluxmetrul electromagnetic este un traductor *generator*. El este construit pe baza principiului efectului Hall, conform căruia, atunci când un fluid ce conține sarcini electrice se deplasează într-o direcție perpendiculară pe direcția unui câmp magnetic, pe cea de a treia direcție a unui sistem cartezian, se generează o tensiune electromotoare. Dacă o particulă care are o sarcină q , se deplasează cu o viteză U într-un câmp magnetic de inducție B , atunci asupra ei se exercită forța Lorentz F , cu expresia cunoscută:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (3.7)$$

Intr-o soluție electrolitică, așa cum este sângele, care trece printr-un câmp magnetic, ionii cu sarcini pozitive și negative se mișcă în direcții opuse; ca urmare, se generează un câmp electric \mathbf{E} , astfel încât forța Lorentz este echilibrată de forța $q\mathbf{E}$, adică:

$$q\mathbf{E} = q(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (3.8)$$

Astfel, dacă se plasează doi electrozi de-a lungul liniilor câmpului electric, între cei doi electrozi va apare o diferență de potențial V :

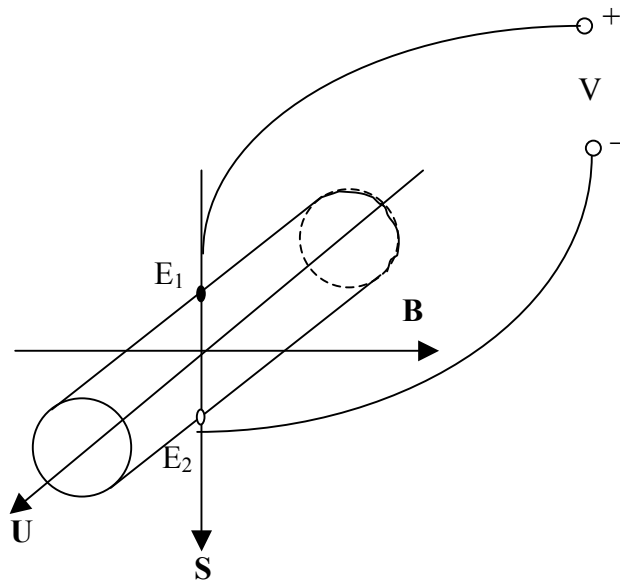


Fig. 3.3

$$V = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{S}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \quad (3.9)$$

unde \mathbf{S} este un vector orientat de-a lungul direcției ce unește pozițiile celor doi electrozi (Fig. 3.3). Dacă viteza \mathbf{U} și inducția magnetică \mathbf{B} sunt perpendiculare, tensiunea electromotoare V capătă expresia:

$$V = dUB \quad (3.10)$$

unde d este distanța între cei doi electrozi, $U = |\mathbf{U}|$, și $B = |\mathbf{B}|$.

În vasele de sânge reale, viteza sângelui este neuniformă. Totuși, se poate arăta că ecuația (3.8) este valabilă în cazul în care se consideră U viteza medie, în măsura în care profilul vitezei este simetric față de axa longitudinală a vasului. Acest lucru este important pentru fluxmetrul electromagnetic. Folosind viteza medie, fluxul Φ , se exprimă prin:

$$\Phi = \frac{\pi d^2 U}{4} = \frac{\pi d V}{4B} \quad (3.11)$$

atât timp cât fluxul este simetric față de axa longitudinală a vasului. În SI, Φ este exprimat în m^3/s , B în tesla (T), iar V în volți.

Din relația (3.9) se constată că rata de variație Q a fluxului sau debitul poate fi aflat dacă se determină viteza U a sângelui. În acest scop pot fi folosite sonde perivasculare, montate în jurul vaselor de sânge și sonde intravasculare, plasate în interiorul vaselor de sânge. Sondele perivasculare sunt folosite în procedurile chirurgicale și uneori pe animale pentru observații continue pe intervale mari de timp.

Sondele intravasculare, sub forma unor catetere de tip electromagnetic sunt folosite clinic pentru monitorizarea vitezei sângelui în artere și vene mari. Prima sondă de determinare a vitezei electromagnetice care utilizează o bobină fără miez a fost realizată de Mills. Schița unei astfel de sonde este prezentată în Fig. 3.4.

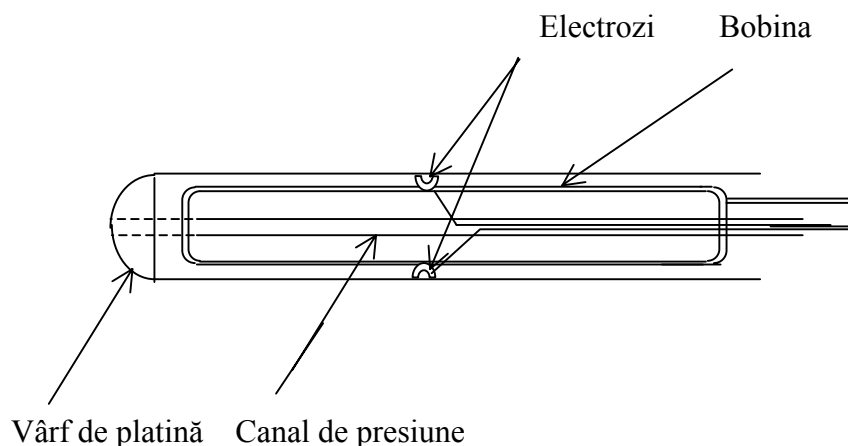


Fig. 3.4

Să stabilim sensibilitatea absolută S_H a traductorului generator, realizat pe baza efectului Hall. Aceasta rezultă din relația (3.10):

$$S_H = \Delta V / \Delta U = dB \quad (3.12)$$

unde valoarea inducției magnetice a bobinei este dată de:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$$

iar μ_0 este permeabilitatea vidului ($4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$).

3.2.2 Fluxmetre ultrasonice de sânge

Frecvența unei unde sonore care se propagă într-un mediu în mișcare este afectată de viteza de deplasare a mediului iar frecvența sunetului împrăștiat de un obiect în mișcare este afectată de viteza obiectului aflat în mișcare. În prima parte a acestei secțiuni sunt prezentate proprietățile fundamentale ale propagării undelor sonore. În partea a doua sunt descrise 2 fluxmetre cu ultrasunete: fluxmetrul cu timp de tranzit sau deplasare de fază și fluxmetrul Doppler.

3.2.2.1 Propagarea ultrasunetelor în țesuturi

Ultrasunetul este definit ca sunetul ce are o frecvență mai mare decât frecvența domeniului audibil omului (20 Hz - 20 kHz). Ultrasunetele se propagă în țesut cu o viteză de aproximativ 1 500 m/s. Viteza sunetului v_s , frecvența sa f și lungimea de undă λ sunt legate prin:

$$v_s = f\lambda \quad (3.13)$$

De exemplu, lungimea de undă a unui sunet de 1 MHz este de aproximativ 1,5 mm. Un sunet, la o anumită poziție în mediu, este caracterizat de presiunea p a sunetului care depinde de viteza v_s a undei și de viteza U a particulelor din mediu:

$$p = \rho v_s U \quad (3.14)$$

Raportul amplitudinii presiunii sonore la viteza particulelor din mediu Z este numită impedanță caracteristică (impedanța pe unitatea de suprafață) a mediului:

$$Z = \frac{p}{U} = \rho v_s \quad (3.15)$$

exprimată în $(\text{kg/s})/\text{m}^2$.

Puterea sunetului I pe unitatea de suprafață este exprimată prin:

$$I = \frac{1}{2} pU = \frac{1}{2} \frac{p^2}{Z} \quad (3.16)$$

cu unități watt/m^2 .

La propagarea prin țesut, ultrasunetele pot fi atenuate prin absorbție, reflexie sau împrăștiere. Dacă o undă plană se propagă în direcția x , într-un mediu absorbant, și dacă are o presiune $p(0)$ la $x=0$, atunci presiunea ultrasunetului la poziția x este dată de:

$$p(x) = p(0)e^{-\alpha x} \quad (3.17)$$

unde α este coeficientul de absorbție. Coeficientul de absorbție variază aproximativ proporțional cu frecvența sunetului. Deoarece, conform (3.16) puterea pe unitatea de suprafață este proporțională cu pătratul presiunii sunetului la o anumită poziție, atunci $P(x)$ este exprimat prin:

$$I(x) = I(0)e^{-2\alpha x} \quad (3.18)$$

3.2.2.2 Fluxmetre ultrasonice cu timp de tranzit și deplasare de fază.

Atunci când o undă sonoră traversează un fluid în mișcare contra curentului sau în sensul curentului, viteza aparentă a sunetului diferă de viteza sunetului în lichidul în repaus, caz în care unda sonoră călătorește cu o viteză constantă relativ la mediu. Atunci când un cristal transmițător și un cristal receptor sunt plasate ca în Figura 3.8, iar viteza fluidului este uniformă pe întreaga secțiune transversală a tubului, timpul de tranzit T poate fi exprimat prin:

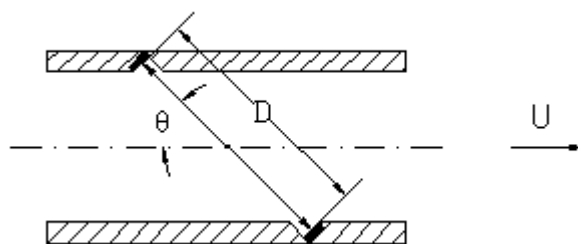


Fig. 3.8

$$T = \frac{D}{v \pm U \cos \theta} \quad (3.19)$$

unde D este distanța între elementele transmițător și receptor, v este viteza unei sonore, U este viteza fluidului, și θ este unghiul pe care îl face fasciculul în raport cu axa tubului; semnul plus sau minus corespund traversării în sensul curentului sau în sens contrar curentului. Diferența între timpul de tranzit al undelor sonore în sensul curentului sau în sens opus se poate obține sub forma:

$$\Delta T = \frac{2DU \cos \theta}{v^2 - U^2 \cos^2 \theta} \approx \frac{2DU \cos \theta}{v^2} \quad (3.20)$$

dacă $U \ll v$. Diferența de fază $\Delta\Phi$, produsă de diferența în timpul de tranzit, este:

$$\Delta\Phi = \omega\Delta T = \frac{2DU \cos \theta}{v^2} \quad (3.21)$$

unde ω este pulsația unei sonore. De exemplu, dacă $D=2$ cm, $U=10$ cm/s, și $\theta=45^\circ$, atunci ΔT este $1,3 \cdot 10^{-9}$ s. Pentru o undă sonoră de 1 MHz, $\omega = 2\pi \cdot 10^6$ rad/s și $\Delta\Phi$ este de aproximativ $8 \cdot 10^{-3}$ rad/s $\approx 0,46^\circ \approx 28'$.

Pentru a detecta diferențele în timp de tranzit sau diferențele de fază, au fost propuse diferite procedee tehnice. Figura 3.9 prezintă o metodă în care diferența de fază poate fi obținută folosind o excitație cu un semnal de unică frecvență. Astfel, pe două cristale sunt trimise semnale de aceeași frecvență dar de faze opuse pe unul față de celălalt. Dacă cele două semnale sunt $\pm V \cos \omega t$, atunci semnalele care apar pe cele două cristale sunt:

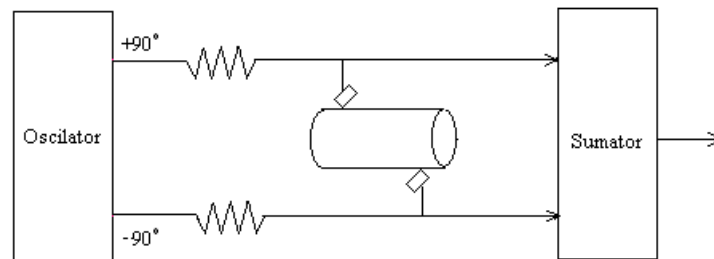


Fig.3.9

$$e_1 = V \cos \omega t - kV \cos(\omega t + \sigma + \Phi) \quad (3.22)$$

$$e_2 = V \cos \omega t + kV \cos(\omega t + \sigma - \Phi) \quad (3.23)$$

unde k este factorul de atenuare, σ este diferența de fază care se stabilește în absența fluxului iar φ este diferența de fază datorată fluxului. Suma celor două semnale este:

$$e = e_1 + e_2 = 2kV \sin \Phi \sin(\omega t + \sigma) \approx 2k\Phi V \sin(\omega t + \sigma) \quad (3.24)$$

Această relație arată că amplitudinea semnalului rezultat este proporțională cu diferența de fază datorată prezenței fluxului.

3.2.2.3 Fluxmetre de ultrasunete cu efect Doppler

Atunci când un fluid în mișcare conține particule pe care sunt împrăștiate ultrasunetele, viteza particulelor poate fi determinată din deplasarea Doppler (modificarea frecvenței) ultrasunetelor împrăștiate. Împrăștierea în care dimensiunea particulelor este mai mică decât lungimea de undă a sunetului este numită împrăștiere Rayleigh. În acest caz, intensitatea undei sonore împrăștiate este proporțională cu puterea a patra a frecvenței sunetului. Această relație a fost confirmată și prin experimente de împrăștiere înapoi a ultrasunetelor în sânge. Ca urmare, semnalul împrăștiat va fi mai puternic la frecvențe mai mari ale sunetului. Totuși, intensitatea sunetului descrește exponențial cu creșterea distanței pe care se propagă sunetul, conform ecuației (3.18) și coeficientul de absorbție α este proporțional cu frecvența sunetului. Dacă raportul între coeficientul de absorbție α și frecvența f se presupune că este o constantă, k , atunci amplitudinea semnalului împrăștiat după propagarea pe o distanță x , se exprimă astfel:

$$I \propto f^4 e^{-2\alpha x} = f^4 e^{-2kfx} \quad (3.25)$$

Această funcție are un maxim la

$$f = \frac{2}{kx} \quad (3.26)$$

De exemplu, pentru $k=2 \cdot 10^{-7}$ s/cm și $x=1$ cm, semnalul împrăștiat are un maximum la

$$f = 10^7 \text{ s}^{-1} = 10\text{MHz} \quad (3.27)$$

Atunci când distanța x crește, frecvența care dă maximul de intensitate variază invers proporțional cu x .

Cu ajutorul fluxmetrului de ultrasunete cu efect Doppler se măsoară deplasarea Doppler (modificarea frecvenței) în unda împrăștiată, datorată deplasării celulelor roșii din sânge. Atunci când un cristal transmițător și unul receptor sunt plasate ca în Fig. 3.10, deplasarea Doppler provocată de viteza obiectului, U , poate fi calculată în două etape.

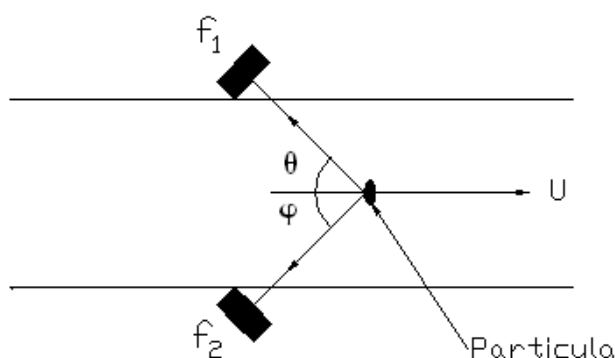


Fig . 3.10

Mai întâi, frecvența semnalului împrăștiat de obiectul țintă este calculată pentru observatorul aflat în mișcare care primește un semnal de la o sursă staționară. Frecvența semnalului recepționată de observatorul aflat în mișcare de la o sursă având unghiul θ față de direcția fluxului este dată de:

$$f_1 = \frac{v + U \cos \theta}{v} f_s \quad (3.28)$$

unde v este viteza sunetului iar f_s frecvența sursei. În a doua etapă, frecvența undei reflectate la un receptor staționar, este calculată pentru un observator staționar care primește un semnal de la o sursă în mișcare. Frecvența undei care se deplasează spre observator având unghiul φ față de direcția fluxului este:

$$f_2 = \frac{v}{v - U \cos \varphi} f_1 \quad (3.29)$$

Deplasarea Doppler Δf , se obține pentru $U \cos \varphi \ll v$, astfel:

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{v + U \cos \theta}{v - U \cos \varphi} f_s - f_s \approx \frac{U(\cos \theta + \cos \varphi)}{v} f_s \quad (3.30)$$

Dacă $\theta = \varphi$,

$$\Delta f \approx \frac{2U \cos \theta}{v} f_s \quad (3.31)$$

De exemplu, dacă $U=100$ cm/s, $\theta = \varphi=45^\circ$, $v=1,5 \cdot 10^5$ cm/s și $f=5$ MHz, atunci Δf este de aproximativ 4,7 kHz. Aceasta înseamnă ca frecvența semnalului recepționat este de 5 MHz+4,7 kHz pentru fluxul care se depărtează de observator și este de 5 MHz-4,7 kHz pentru fluxul care se deplasează înspre observator.

3.1 Traductori piezoelectrice.

Pentru generarea și detectarea ultrasunetelor de obicei se folosesc traductori piezoelectrice. Traductorii piezoelectrice fac parte din clasa *traductorilor generatori*. Elementul activ al traductorului este o placă de cristal piezoelectric cu electrozi metalici pe două fețe opuse.

Piezoelectricitatea este numele fenomenului în care sunt generați dipoli electrici în anumite cristale anizotrope atunci când acestea sunt supuse la acțiunea unor tensiuni mecanice. Acesta este efectul piezoelectric direct. Efectul a fost descoperit în 1880 de Jacques și Pierre Curie. În 1881 Lippman sugerează existența efectului piezoelectric invers: aplicarea unei tensiuni electrice asupra aceluiași material produce o deformare sau o tensionare mecanică. Materialele piezoelectrice sunt cristale naturale, ca de exemplu cuarțul (SiO_2) și materiale piezoelectrice ceramice ca de exemplu titanat zirconat de plumb (PZT) (cu structura titanatului de bariu).

3.3.1 Ecuațiile efectului piezoelectric.

Un mediu netensionat mecanic aflat sub acțiunea unui câmp electric este caracterizat de 2 mărimi – intensitatea câmpului electric E și inducția electrică D , legate prin relația:

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \quad (3.32)$$

unde $\varepsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m este permitivitatea dielectrică a vidului iar ε_r este permitivitatea relativă a mediului.

Proprietățile mecanice ale aceluiași mediu în câmp electric zero sunt caracterizate de 2 mărimi mecanice – tensiunea mecanică aplicată T $\left(= \frac{\Delta F}{\Delta A} \right)$ unde F este forța iar A este aria suprafeței pe care acționează, (N/m^2) și deformarea S $\left(= \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)$ unde ℓ este lungimea cristalului. Relația dintre ele este:

$$S = \frac{1}{Y} T \quad (3.33)$$

unde Y este modulul lui Young (N/m^2) .

Cercetările arată că piezoeffectul este un efect liniar, adică în cazul unui efect piezoelectric direct, tensiunile mecanice T , provoacă o polarizare electrică P direct proporțională cu acestea:

$$P = dT \quad (3.34)$$

d este coeficientul de proporționalitate, numit constantă piezoelectrică (C/N) .

Pe lângă tensiunile mecanice, polarizarea poate fi provocată de deformarea mecanică S , de unde rezultă încă o ecuație a piezoeffectului:

$$P = eS \quad (3.35)$$

unde e reprezintă modulul piezoelectric (C/m^2) .

Se poate găsi o legătură între coeficienții d și e , dacă se aplică legea lui Hooke din teoria elasticității $\left(\frac{\Delta F}{\Delta A} = Y \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)$:

$$T = YS \quad (3.36)$$

unde Y reprezintă modulul lui Young (v. (3.33)).

Intr-adevăr, din (3.33-3.35) rezultă:

$$d = \frac{e}{Y} \quad (3.37)$$

În efectul piezoelectric direct, polarizarea provocată de tensiuni mecanice sau deformări poate fi exprimată prin intensitatea câmpului electric. Ecuațiile efectului direct apar în acest caz sub forma:

$$\begin{aligned} E &= -gT \\ E &= -hS \end{aligned} \quad (3.38)$$

unde g este o altă constantă piezoelectrică (Vm/N) iar h alt modul piezoelectric (V/m) .

Aplicarea legii lui Hooke (3.21) permite să se stabilească o legătură între coeficienții g și h :

$$h = Yg \quad (3.39)$$

Alegerea semnului coeficienților d, e, g și h este convențională și este determinată de “semnul” deformării și de direcția câmpului corespunzătoare acesteia.

O examinare termodinamică demonstrează că ecuațiile efectului piezoelectric invers pot fi scrise cu ajutorul acelorai coeficienți d, g, e și h , astfel:

$$\begin{aligned} S &= dE \\ T &= -eE \\ S &= gP \\ T &= -hP \end{aligned} \quad (3.40)$$

unde coeficienții au aceleași definiții și unități de măsură ca în definițiile efectului piezoelectric direct.

Piezoelectricitatea implică interacțiunea între comportarea electrică și mecanică a mediului. Într-o bună aproximație această interacție poate fi descrisă prin relații lineare între variabilele mecanice și electrice, având în vedere și relațiile (3.32) și (3.33):

$$\left. \begin{aligned} D &= dT + \varepsilon^T E \\ S &= \frac{T}{Y^E} + dE \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{T}{Y^D} + gD \\ E &= -gT + \frac{D}{\varepsilon^T} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= Y^E S - eE \\ D &= eS + \varepsilon^S E \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= Y^D S - hD \\ E &= -hS + \frac{D}{\varepsilon^S} \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

În aceste ecuații, indicii superiori semnifică mărimile menținute constante în condițiile de lucru. De exemplu, “scurtcircuitând” electrozii plasați pe probă, câmpul electric este menținut constant, și se folosește indicele E. Menținând circuitul deschis, inducția electrică este constantă și atunci se folosește indicele D. Astfel, Y^D și Y^E sunt modulii elastici la densitate constantă de sarcină electrică și respectiv la câmp constant. Mărimile ϵ^T și ϵ^S sunt permitivitățile electrice la tensiune constantă și respectiv la deformare constantă.

Se poate găsi o legătură doar de natură electrică între coeficienții d,g,e și h; astfel, din ecuațiile (3.41) și (3.42) rezultă:

$$\begin{aligned} d &= \epsilon^T g \\ e &= \epsilon^S h \end{aligned} \quad (3.45)$$

Cei patru coeficienți piezoelectrice d,g,e și h așa cum au fost definiți sunt legați între ei, dar fiecare reprezintă un aspect diferit al efectului piezoelectric și este folositor pentru anumit set particular de condiții. De exemplu, d măsoară deformarea într-un cristal “liber” (la tensiuni mecanice constante), g indică tensiunea la circuit deschis la o tensiune mecanică dată, e măsoară tensiunea mecanică dezvoltată de un câmp electric atunci când este “blocat” (deformări constante), iar h dă tensiunea la circuit deschis pentru o deformare dată.

Între modulii elastici Y^D la inducție și Y^E la câmp constant, din (3.41) și (3.42) rezultă următoarea relație:

$$Y^E = (1 - k^2) Y^D \quad (3.46)$$

unde k este definit de:

$$k^2 = Y^E \frac{d^2}{\epsilon^T} \quad (3.47)$$

sau, folosind (3.32):

$$\frac{k^2}{1 - k^2} = Y^D g^2 \epsilon^T \quad (3.48)$$

În mod similar, se poate găsi legătura între ϵ^S (permitivitatea dielectrică a cristalului “blocat”) și ϵ^T (permitivitatea dielectrică a cristalului “liber”) din (3.42) și (3.43):

$$\epsilon^S = (1 - k^2) \epsilon^T \quad (3.49)$$

Mărimea k astfel introdusă are o semnificație fizică importantă. La frecvențe depărtate de frecvența de rezonanță, k^2 poate fi considerat ca

energia care se transformă din energie mecanică în energie electrică și invers (componenta mutuală) raportată la energia elastică și electrică înmagazinată. k poartă numele de coeficient de cuplaj.

Neglijând componentele magnetice și termice, energia internă U pe unitatea de volum a unui sistem liniar este dată de:

$$U = \frac{1}{2}TS + \frac{1}{2}ED \quad (3.50)$$

Folosind ecuațiile (3.28), se ajunge la:

$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2}{Y^E} + \frac{1}{2}TdE + \frac{1}{2}EdT + \frac{1}{2}\varepsilon^T E^2 = U_e + 2U_m + U_d \quad (3.51)$$

unde indicii e , m și d se referă la energiile elastică, mutuală și dielectrică. Din (3.38) coeficientul de cuplaj k poate fi scris sub forma:

$$k = \frac{U_m}{\sqrt{U_e U_d}} \quad (3.52)$$

Având în vedere expresiile energiilor din relația (3.39), rezultă pentru k

$$k^2 = \frac{\frac{1}{2}dET}{\sqrt{\frac{1}{2} \frac{T^2}{Y^E} \frac{1}{2} \varepsilon^T E^2}} = Y^E \frac{d}{\varepsilon^T} \quad (3.53)$$

valoarea găsită în (3.34).

Campul electric E , inducția D sunt vectori, cu 3 componente distincte, permitivitatea dielectrică ε este un tensor de rangul al doilea, tensiunile T și deformările S sunt tensori de rangul al doilea, având câte 6 componente distincte (în loc de 9, datorită absenței cuplurilor de forțe), și în consecință, coeficienții piezoelectrice d , g , e și h care sunt tensori de rangul cu 3 au 18 componente distincte (în loc de 27), iar modulii de elasticitate care sunt tensori de rangul 4 au 21 de componente distincte (în loc de 81). Numărul acestor componente este și mai redus, în funcție de proprietăților de simetrie ale eșantioanelor piezoelectrice. Astfel, pentru cuarț, singurele constante piezoelectrice diferite de zero sunt în număr de 5:

$$d_{11}, \quad d_{12} = -d_{11}; \quad d_{14}; \quad d_{25} = -d_{14}; \quad d_{26} = -2d_{11} \quad (3.54)$$

cu valorile: $d_{11} = -2,25 \cdot 10^{-12} \text{ C/N}$; $d_{14} = 8,5 \cdot 10^{-13} \text{ C/N}$. Pentru materialele piezoelectrice realizate prin tehnologie ceramică, constantele piezoelectrice diferite de zero sunt:

$$d_{15}; d_{24} = d_{15}; d_{31}; d_{32} = d_{31}; d_{33} \quad (3.55)$$

Pentru a avea o oarecare imagine asupra mărimii piezoeffectului în cuarț, vom menționa că, aplicată unei lamele tăiate după axa X, cu o grosime de 1 cm în direcția X, creează o deformare:

$$S_1 = d_{11}E_1 = d_{11} \frac{V}{\ell} = 2,25 \cdot 10^{-12} \frac{10^3}{10^{-2}} = 2,25 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

și mărește dimensiunile lamelei cu:

$$\Delta \ell = 2,25 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,25 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 22,5 \text{ \AA}.$$

Pe de altă parte, în cazul efectului piezoelectric direct, la o presiune de 1 kgf/cm^2 care acționează în direcția axei X, se creează un câmp E de-a lungul acestei direcții:

$$E = -gT = -\frac{d}{\epsilon^T} T = \frac{2,25 \cdot 10^{-12}}{4,58 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} 10^5 = 5,5 \cdot 10^3 \text{ V/m}$$

unde $\epsilon_r=4,85$, și de-a lungul acestei direcții apare o tensiune V:

$$V = 5,5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = 55 \text{ V}$$

În concluzie, atunci când pe electrozi este aplicat un potențial electric alternativ, grosimea cristalului piezoelectric se modifică în aceeași măsură și el generează o undă sonoră. În mediul înconjurător. Atunci când unda sonoră este recepționată de un cristal piezoelectric, ea provoacă o deformare mecanică în material. Astfel, apare o polarizare electrică a materialului în urma căreia este generat un semnal electric corespunzător presiunii sunetului.

Pentru a pune în evidență existența piezoeffectului se fac măsurări pentru determinarea frecvențelor de rezonanță și antirezonanță, care se manifestă în cristalele sau materialele ceramice piezoelectrice.

Dacă asupra unei plăcuțe piezoelectrice dintr-un material ceramic, de lungime ℓ , lățime w și grosime h , cu electrozi pe fețele de suprafață cea mai mare (din planul xy în figura 3.5), se aplică un câmp electric alternativ de intensitate E (pe direcția z), atunci mișcarea particulelor are loc pe o direcție perpendiculară pe direcția câmpului aplicat (T este pe direcția x) și se stabilesc vibrații longitudinale.

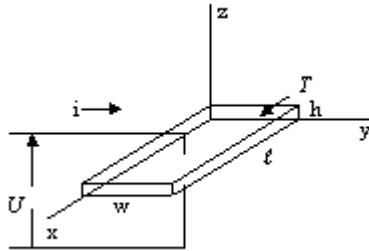


Fig. 3.5

Se poate calcula viteza de propagare a sunetului în probă:

$$v = \sqrt{\frac{Y^E}{\rho}} \quad (3.56)$$

și frecvența de rezonanță a eșantionului (pentru impedanța minimă):

$$f_r = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Y^E}{\rho}}$$

Dacă asupra aceleai plăcuțe piezoelectrice din material ceramic, de lungime l , lățime w și grosime h , cu electrozi pe fețele de suprafață mai mică (din planul xy di figura 3.6), se aplică un câmp electric alternativ de intensitate E (pe direcția z), atunci mișcarea particulelor are loc pe aceeași direcție cu direcția câmpului aplicat (T este pe direcția z) și se stabilesc vibrații longitudinale.

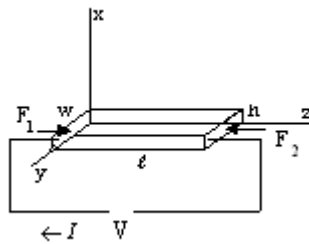


Fig.3.6

În acest caz, viteza sunetului în probă este dată de:

$$v = \sqrt{\frac{Y^D}{\rho}} \quad (3.57)$$

iar frecvența de antirezonanță (pentru impedanță maximă este dată de:

$$f_a = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{Y^D}{\rho}} \quad (3.58)$$

Din relațiile (3.45) și (3.43) se calculează cu aproximație, mărimea care conduce la evaluarea coeficientului de cuplaj k^2 :

$$\frac{f_a^2 - f_r^2}{f_a^2} = \frac{Y^D - Y^E}{Y^E} = \frac{k^2}{1 - k^2} \quad (3.59)$$

În Figura 3.7 este prezentat circuitul echivalent al unui material piezoelectric și dependența impedanței de frecvență, cu evidențierea frecvențelor de rezonanță și antirezonanță.

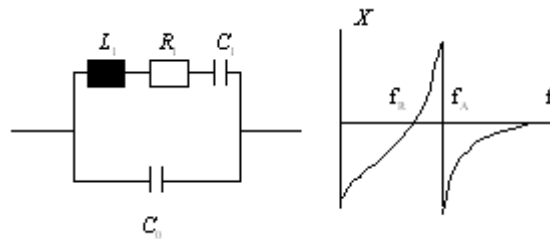


Fig.3.7