TRADUCTORI pentru APARATURA MEDICALA

In cercetarea medicala, ca si in medicina clinica, este importanta achizitia datelor fiziologice din corpul uman pentru cresterea nivelului de intelegere al mecanismelor fiziologice de baza si pentru inlesnirea procedurilor de diagnosticare. Calitatea unor astfel de masurari depinde de performanta senzorilor, traductorilor si instrumentelor din sistemul de masura. Corpul uman este un obiect "greu" de masurat; masurarile de precizie ale semnalelor fiziologice necesita senzori, traductori si instrumente care au *specificitate* si *selectivitate* mari si care nu interfera cu sistemele aflate in studiu.

Senzorul este un instrument care permite decelarea unei informatii continuta de un obiect sau manifestarea unui fenomen (*sensor* in engleza, *capteur* in franceza). Senzorii se substituie celor cinci simturi ale omului (vazul, auzul, pipaitul, mirositul si gustul) pentru masurarea cantitativa a marimilor fizice ale unui obiect sau in detectarea fenomenelor insesizabile omului. In sens larg, senzorul este un element capabil sa efectueze o conversie.

Traductorul este un dispozitiv care transforma un anumit tip de semnal – sonor, electric, luminos – in semnal electric, conform unei legi determinate.

Primul capitol al lucrarii cuprinde o scurta prezentare a conceptelor necesare pentru intelegerea functionarii sistemelor de masurare si ale instrumentelor. Celelalte capitole sunt legate de marimi importante studiate in medicina: presiunea, fluxul, temperatura si miscarea de exemplu.

Aplicarea principiilor senzorilor, traductorilor si instrumentelor in medicina este prezentata din punct de vedere practic. Este important de avut in vedere probleme cum sunt biocompatibilitatea, interferenta electromagnetica si modul de atasare a sondelor la sistemul biologic aflat in studiu.

Capitolul 1

Concepte fundamentale

1.1 Semnale si zgomot in masurari

1.1.1 Masurarea

O *masurare* este un procedeu prin care un observator determina cantitatea ce caracterizeaza proprietatea unei stari sau a unui obiect. Cantitatea ce trebuie determinata este marimea de interes principala a masurarii. In aceasta lucrare marimile de masurat sunt marimi fizice si chimice care contin informatia biologica. Uneori astfel de marimi pot fi evaluate prin simturile umane, ca de exemplu prin observatia vizuala. Dar, pentru a obtine rezultate obiective, reproductibile si cantitative trebuie folosite instrumente pentru care rezultatle sunt semnale de iesire ale sistemului de masurare.

Caracteristicile fizice ale semnalelor depind de tipul instrumentului folosit. Atunci cand sunt folosite instrumente electronice, semnalul de iesire este un potential electric. Acest semnal poate fi convertit in valori digitale. In orice caz, marimile fizice sau chimice originale sunt convertite in forme convenabile, cum sunt un potential electric sau o valoare numerica. Pentru a descrie corect marimile de masurat la iesirea unui instrument, trebuie definita o relatie intre semnalul de iesire de la instrument si marimea de masurat care reprezinta semnalul de intrare. Pentru a realiza acest lucru sunt necesare proceduri bune de calibrare. Termenul de *masurare* implica intreaga procedura prin care marimea de masurat este corect determinata.

1.1.2 Semnale si zgomot

Intr-o masurare, *semnalul* este componenta variabilei ce contine informatia despre marimea de masurat, in timp ce *zgomotul* este componenta nelegata de marimea de masurat. Astfel, intr-o masurare, semnalul este componenta dorita iar zgomotul componenta nedorita.

Semnalele si zgomotul nu sunt definite in mod unic prin domeniul si modul lor de variatie ci depind de scopul observatorului. De exemplu, in masurarile de biopotential, electromiograma (EMG), care masoara potentialul generat de muschi, da informatii despre activitatea musculara; astfel, EMG poate fi considerat un semnal. Dar EMG este componenta nedorita pentru alt observator care urmareste obtinerea potentialului de actionare al nervilor. In acest caz, EMG este considerat un fel de zgomot.

Cu alte cuvinte, definitia semnalului si zgomotului depinde de scopul observatorului si este arbitrara in situatiile generale ale masurarilor.

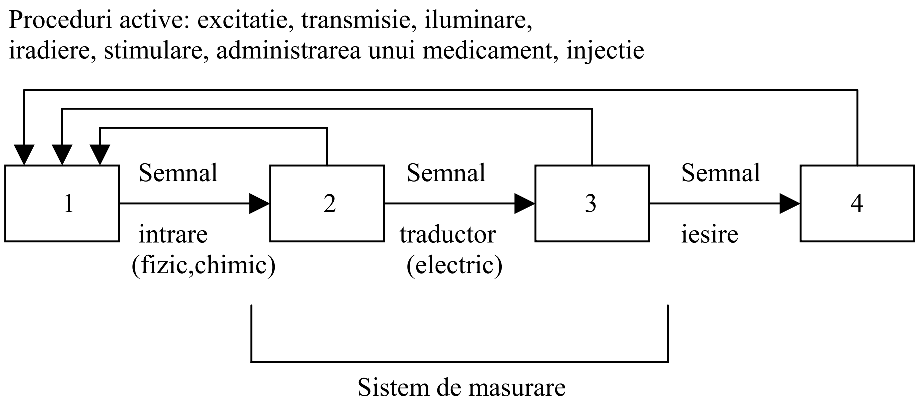
In situatiile practice, raportul semnal zgomot este determinat in domenii de frecventa limitate, si valorile sale sunt diferite pentru diverse domenii de frecventa pentru ca semnalul si zgomotul au spectre de frecventa diferite.

Raportul este exprimat in decibeli (db). Raportul puterii semnalelor se exprima prin $10 \log_{10} S/N$ iar raportul amplitudinilor prin $20 \log_{10} S/N$.

1.2 Caracteristicile sistemului de masurare

1.2.1 Traductori si sisteme de masurare

In procesul de masurare, observatorul obtine informatii despre obiectul de masurat folosind un sistem de masurare. De obicei, un sistem de masurare contine un traductor si un instrument electric asa cum este aratat in Fig. 1.1. Marimea fizica sau chimica ce caracterizeaza obiectul de masurat este detectata de catre traductor si este transformata intr-o cantitate electrica, care este afisata prin intermediul unui instrument electronic adecvat care transfera rezultatul observatorului.



1- Obiectul de masurat
2- Traductor
3- Instrument electronic
4- Observator

Fig. 1.1 Structura generala a sistemului de masurare

Uneori, masurarile necesita aplicarea unor proceduri active obiectului de studiat, cum sunt excitarea, iradierea, stimularea, administrarea unui medicamnet sau injectia. Aceste proceduri sunt considerate parte a procesului de masura si sunt realizate de traductor sau de alte parti ale sistemului de masurare.

Desi in unele masurari procedura activa este inevitabila, influenta sa asupra obiectului de studiat trebuie minimalizata din doua motive: mai intai, pentru a reduce cat mai mult rolul intamplarii si apoi pentru a minimaliza modificarea marimii de masurat datorita procedurii active. Pe de alta parte, adesea apare situatia in care masurarea devine mai usoara si mai precisa daca sunt marite energia stimulilor aplicati in procedura activa. Nivelul procedurii active poate fi determinat ca un compromis intre doua tendinte contrarii: micsorarea influentei asupra obiectului de masurat si marirea performantei sistemului de masurare.

Traductorul este o parte esentiala a sistemului de masurare, deoarece calitatea sistemului de masurare este determinata in cea mai mare parte de performantele traductorului utilizat. De exemplu, raportul semnal-zgomot este determinat intotdeauna in principal de traductor, in masura in care la interfete sunt folosite circuite electronice adecvate.

Dupa principiul de functionare, traductoarele sunt de 2 tipuri:

1. Traductoare parametrice
2. Traductoare generatoare

Traductoarele parametrice sunt traductoare la care semnalul neelectric, aplicat la intrare, determina modificarea unei proprietati electrice (parametru electric) al traductorului, cum sunt rezistenta electrica, capacitatea electrica, inductanta, inductanta mutuala, coeficientul de atenuare al radiatiei. Aceasta reprezinta o <u>convertire pasiva</u>. Punerea in evidenta a modificarii parametrului electric <u>necesita existenta unei surse exterioare de energie (sursa de activare)</u>. Exemple: termorezistenta, fotorezistenta.

Traductoarele generatoare sunt traductoare la care semnalul neelectric, aplicat la intrare, determina generarea unei tensiuni electromotoare. Convertirea unei energii de un anumit fel in energie electrica este o <u>convertire activa</u>. Punerea in evidenta a marimii de la iesirea traductorului nu necesita existenta unei surse exterioare de energie. Exemple: termocuplul, elementul fotovoltaic.

Diferitele tipuri de marimi de masurat necesita diferite tipuri de traductori. De asemenea, sunt necesare diferite tipuri de traductori conform cerintelor diverselor situatii de masurare cum ar fi nivelul amplitudinii semnalelor, domeniile de frecventa, exigentele de precizie, limitele impuse de dimensiuni, de forme, de materiale sau de procedurile de masurare fara intromisie. In masurarile biomedicale, traductorii proiectati pentru alte scopuri sunt deobicei nepotriviti chiar atunci cand caracteristicile lor principale ca tipul marimilor de masurat, domeniile de masura sau raspunsurile in frecventa sunt acceptabile. In realitate, majoritatea traductorilor utilizati in masurari biomedicale sunt astfel proiectati incat pot fi aplicati corpului uman cu efecte secundare minime in scopul de a obtine corect informatia biologica dorita.

1.2.2 Caracteristici statice

In majoritatea sistemelor de masurare, semnalul de iesire al sistemului de masura poate fi determinat in intregime in functie de semanlul de intrare al marimii de masurat la un moment dat, daca modificarea marimii de masurat este suficient de lenta. Intr-o asemenea situatie, relatia semnal de iesire – semnal de intrare a sistemului de masurare poate fi determinata in mod unic, indiferent de trecerea timpului. Marimea de masurat si caracteristicile care reprezinta relatia intre semnalul de iesire al sistemului de masurare si marimea de masurat sunt numite *caracteristici statice*.

1.2.2.1 Sensibilitatea, rezolutia si reproductibilitatea

Termenul *sensibilitate* este totdeauna folosit astfel incat sensibilitatea unui traductor sau a unui sistem de masura sa fie mare atunci cand o modificare mica a marimii de masurat $(\Delta S_1;\Delta x)$ provoaca o modificare importanta a semnalului de iesire $(\Delta S_2;\Delta y)$. Dar, aceasta definitie a sensibilitatii nu este singura. In unele cazuri, sensibilitatea este definita ca raportul intre semnalul de iesire si semnalul de intrare:

$$S_a = \Delta S_2 / \Delta S_1 = \Delta y / \Delta x \tag{1.1}$$

In aceasta definitie, valoarea numerica ce reprezinta sensibilitatea este mare atunci cand sensibilitatea este mare. Definitia (1.1) reprezinta *sensibilitatea absoluta* a sistemului de masura. Daca variatia semnalelor este raportata la marimea lor, atunci se poate defini *sensibilitatea relativa*:

$$S_r = \frac{(\Delta S_2)/S_2}{(\Delta S_1)/S_1} \tag{1.2}$$

In alte cazuri, sensibilitatea este definita ca raportul intre semnalul de intrare si semanlul de iesire. Acest factor corespunde variatiei cantitatii marimii de masurat care produce modificarea cu o unitate a semnalului de iesire. Prin definitie, valoarea numerica este mica atunci cand sensibilitatea este mare. Sensibilitatea are o dimensiune atunci cand marimea de masurat si aceea a semnalului de iesire sunt diferite. Sensibilitatile pentru cantitatile diferitelor marimi de masurat sunt reprezentate in diferite unitati ca de exemplu mV/kPa, μA/K. mV/pH, etc.

Sensibilitatea poate avea o valoare constanta atunci cand modificarea semnalului de iesire este legata liniar de modificarea marimii de masurat. Sensibilitatea insa nu este constanta atunci cand raspunsul este neliniar; in acest caz sensibilitatea depinde da valoarea absoluta a marimii de masurat.

Rezolutia etse cea mai mica valoare a marimii de masurat care poate fi distinsa in semnalul de iesire al sistemului de masurare. O modificare a marimii de masurat care este mai mica decat rezolutia sistemului de masurare nu produce o modificare detectabila a semnalului de iesire care sa fie deosebit de zgomot. Valoarea numerica a rezolutiei este mica atunci cand rezolutia este mare. Rezolutia are aceleasi dimensiuni ca si marimea de masurat.

Reproductibilitatea arata cat de apropiate ca valoare sunt semnalele de iesire atunci cand este masurata repetat aceeasi marime. Cantitativ, reproductibilitatea unui sistem de masurare este definita ca domeniul marimii de masurat pentru care masurarile succesive ale marimii respective sunt cuprinse cu anumita probabilitate in acel domeniu. Daca nu este specificat nivelul probabilitatii, atunci este subinteles sa fie de 95%. Atunci cand domeniul este ingust, reproductibilitatea este mare.

Termenul de *repetabilitate* este si el folosit pentru a exprima conceptul de reproductibilitate, dar repetabilitatea este inteleasa ca reproductibilitatea intr-un interval scurt de timp atunci cand acesti termeni sunt distincti.

1.2.2.2 Domeniul de masura

Domeniul de masura este intreg domeniul marimii de masurat pentru care sistemul de masurare lucreaza la performanta nominala a sistemului de masurare respectiv. Astfel, domeniul de masura depinde de exigentele de performanta cum sunt sensibilitatea, rezolutia sau reproductibilitatea. Daca exigentele sunt mari, domeniul de masura este ingust. Uneori sunt specificate domenii de masura diferite pentru exigente diferite. De exemplu, la un termometru, domeniul de masura este de la 30 la 40^0 C pentru reproductibilitate de $0{,}1^0$C, si de la O la 50^0C pentru reproductibilitate de $0{,}5^0$C.

Domeniul de masura stabileste modificarea maxima a marimii de masurat atat timp cat este respectata performanta nominala a sistemului de masura. Pe de alta parte, modificarea minima detectabila a marimii de masurat este data de rezolutie. Raportul intre domeniul de masura si rezolutie este numit *domeniul dinamic.* Domeniul dinamic este adimensional si este uneori exprimat in decibeli (db).

1.2.2.3 Liniaritate si neliniaritate

Liniaritatea arata cat de aproape de o linie dreapta este relatia semnal de iesire – semnal de intrare intr-un sistem de masurare. In functie de linia dreapta care este luata in considerare, sunt folosite diferite definitii ale liniaritatii. Astfel, linia dreapta poate fi definita prin fitarea relatiei semnal de iesire – semnal de intrare prin metoda celor mai mici patrate; alte linii drepte determinate prin fitarea prin metoda celor mai mici patrate pot fi obligate sa treaca fie prin origine, fie prin punctul terminal sau prin amandoua. Atunci cand se foloseste linia dreapta care trece prin origine, liniaritatea specifica acestei definitii este numita *liniaritate cu baza zero* sau *proportionalitate*.

Ca o masura cantitativa a liniaritatii, se poate utiliza abaterea maxima a curbei semnal de iesire – semnal de intrare de la linia dreapta. Totusi, in mod conventional, pentru a indica aceasta valoare este folosit termenul de *neliniaritate*, deoarece valoarea numerica la folosirea acestei definitii este mare atunci cand abaterea relatiei semnal de iesire – semnal de intrare de la o dreapta este semnificativa.

Atunci cand liniaritatea este mare (sau neliniaritatea este mica), relatia semnal de iesire – semnal de intrare poate fi considerata o linie dreapta, si astfel sensibilitatea poate fi considerata constanta. Pe de alta parte, atunci cand liniaritatea este scazuta (sau neliniaritea este mare), sensibilitatea depinde de nivelul semnalului de intrare.

Desi este de dorit o liniaritate cat mai mare in majoritatea sistemelor de masurare, masurari precise sunt posibile chiar la un raspuns neliniar, in masura in care relatia semnal de iesire – semnal de intrare este pe deplin determinata. Folosind un computer, se poate estima semnalul de intrare la fiecare interval de testare, atunci cand este cunoscuta relatia semnal de iesire – semnal de intrare.

1.2.3 Caracteristici dinamice

Caracteristicile dinamice ale sistemului de masura descriu o relatie tranzitorie semnal de iesire – semnal de intrare, in timp ce caracteristicile statice sunt legate de relatia semnal de iesire – semnal de intrare atunci cand semnalul de intrare ramane constant sau se modifica lent. Caracteristicile dinamice sunt bine de cunoscut atunci cand este de interes raspunsul la semnale de intrare variabile in timp. Modelul variatiei in timp a marimii de masurat este considerat de tipul unei unde, dar formele reale ale undelor nu sunt reproduse decat atunci cand caracteristicile dinamice sunt foarte bune.

Caracteristicile dinamice sunt importante in special atunci cand traductorul este o parte a sistemului de control. Instabilitatile sau oscilatiile apar in cazul unui raspuns dinamic slab al traductorului.

Cea mai obisnuita cauza care afecteaza caracteristicile dinamice ale unui sistem de masurare este prezenta elementelor care stocheaza si eleibereaza energie atunci cand variaza marimea de masurat. Astfel de componente sunt de exemplu, elementele de inertie, ca masele si inductantele si elementele elastice, ca resorturile si capacitatile electrice si termice. Daca deplasarile partilor mecanice si fluide provoaca intarzieri in timp, ele vor influenta caracteristicile dinamice. In afara de sistemul de masurare, materia obiectului de masurat si natura mediului inconjurator pot afecta de asemenea caracteristicile dinamice ale intregului proces de masurare. In aceasta situatie, caracteristicile dinamice trebuie corelate cu materialele obiectului si ale mediului, ca de exemplu in cazul sistemelor cateter – senzor folosite la masurarea presiunii (v. Sect. 2.2.2).

1.2.3.1 Sisteme liniare si neliniare

Termenul de *sistem liniar*, sau conceptul ca un sistem este liniar, se refera la un sistem sau la conditia in care un sistem este reprezentat printr-o ecuatie diferentiala liniara. Intr-un sistem liniar, raspunsul la semnale de intrare simultane este suma raspunsurilor la semnalele de intrare independente. Uneori, sistemul liniar este definit de aceasta conditie. Un sistem care nu indeplineste aceasta conditie este numit *sistem neliniar*.

Intr-un sistem liniar, caracteristicile dinamice sunt aceleasi indiferent de amplitudinea semnalului de intrare. Amplitudinea semnalului de raspuns este direct proportional cu amplitudinea semnalului de intrare, deoarece un semnal de intrare mare poate fi considerat ca suma unor semnale de intrare mici; prin urmare, raspunsul corespunzator unui semnal de intrare mare este suma unor raspunsuri la semnale de intrare mici. Aceasta proprietate este importanta deoarece multi parametri utili ce caracterizeaza sistemul pot fi definiti indiferent de amplitudinea semnalului.

Sistemele reale nu pot fi totdeauna liniare atunci cand semnalul de intrare depaseste domeniul de masura. Pe de alta parte, majoritatea sistemelor de masurare pot fi considerate liniare daca modificarile semnalului de intrare sunt mici. Chiar intr-un sistem neliniar se poate considera prezenta unui sistem liniar propriu ca rezultat al aproximarii raspunsului pe un domeniu de masura ingust. Raspunsul la un semnal de intrare sinusoidal intr-un sistem liniar este tot sinusoidal cu aceeasi frecventa, in timp ce intr-un sistem neliniar pot apare componente de alte frecvente cum sunt armonicele de ordin superior.

1.2.3.2 Raspunsul in frecventa

Raspunsul in frecventa se refera la dependenta amplitudinii relative, data de raportul amplitudinii semnalului de iesire la amplitudinea semnalului de intrare sinusoidal si faza semnalului de iesire sinusoidal normate la unitate pe intreg domeniul de frecventa in care sunt luate in considerare caracteristicile dinamice. De obicei, raspunsul in frecventa se refera numai la sisteme liniare.

Semnalul de iesire a unui sistem liniar poate fi descris ca suma unor raspunsuri corespunzatoare unor semnale de intrare avand diferite frecvente, deoarece semnalul de intrare poate fi exprimat ca suma unor functii sinusoidale ca in ecuatiile ce urmeaza pentru un spectru Fourier discret si un spectru Fourier continuu:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}; \qquad X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} \tag{1.3}$$

si

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1.4}$$

Prin urmare, raspunsul in frecventa furnizeaza caracteristicile complete despre semnalul de iesire in functie de orice semnal de intrare.

Atunci cand relatia semnal de intrare – semnal de iesire este descrisa de o ecuatie diferentiala de ordinul intai cu coeficienti constanti, sistemul este numit *sistem de ordinul intai.* Ecuatia diferentiala care descrie un sistem de ordinul intai se scrie astfel:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t) \tag{1.5}$$

unde $x(t)$ si $y(t)$ sunt semnalele de intrare si de iesire ale sistemului iar a_0 si a_1 sunt constante. Raspunsul in frecventa al sistemului poate fi reprezentat ca in Fig. 1.2(a) si (b), unde frecventa de taiere f_c este data de: $f_c = \frac{a_0}{2\pi a_1}$ (1.6)

si este numita *frecventa de taiere.*

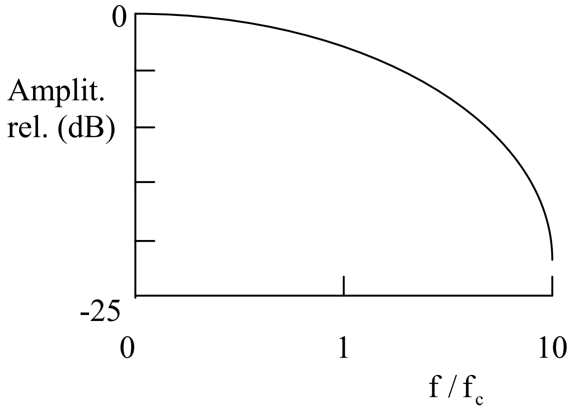


Fig. 1.2 (a) Raspunsul in frecventa pentru sisteme liniare. Amplitudinea relativa pentru sisteme de ordinul intai.

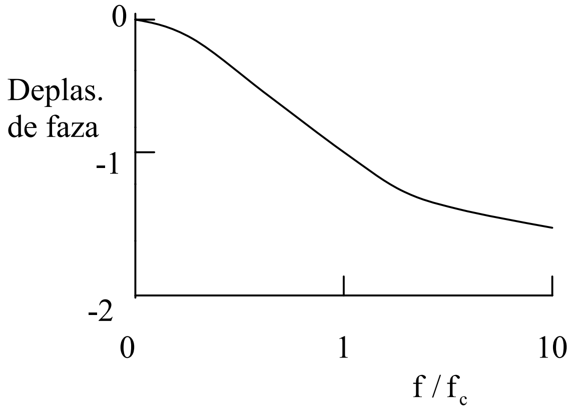


Fig. 1.2(b) Raspunsul in frecventa pentru sisteme liniare. Faza pentru sisteme de ordinul intai.

Un exemplu de sistem liniar de ordinul intai il costituie circuitul electric serie ce contine un condensator de capacitate C si un rezistor de rezistenta R asupra caruia se aplica o diferenta de potential $V = V_0 \sin \omega t$. Cantitatea de electricitate Q de pe placile condensatorului este data de $Q = CV = CV_0 \sin \omega t$. Potrivit legilor lui Kirchhoff, vom scrie ca in orice moment suma fortelor electromotoare este egala cu caderile de tensiune:

$$Ri = -\frac{Q}{C} + V_0 \sin \omega t \tag{1.7}$$

unde curentul $i = \frac{dQ}{dt}$.

Ecuatia (1.7) poate fi rescrisa astfel incat sa fie pusa in evidenta tipul de ecuatie dat de (1.5):

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t \tag{1.8}$$

Pentru a afla solutia ecuatiei (1.8) stabilim mai intai solutia generala a ecuatiei omogene:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{1.9}$$

care cu conditia initiala pentru $t = 0 \rightarrow Q = Q_0$ (corespunzatoare descarcarii condensatorului) este:

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \tag{1.10}$$

La aceasta solutie se adauga solutia particulara a ecuatiei neomogene (1.8) pe care o gasim prin metoda coeficientilor variabili ($dQ_0 / dt \neq 0$). In acest scop exprimam ecuatia (1.8) in forma urmatoare:

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \frac{V_0}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \tag{1.11}$$

Din (1.11) rezulta urmatoarea relatie pentru derivata lui Q_0 in raport cu timpul:

$$\frac{dQ_0}{dt} = \frac{V_0}{2jR} e^{t/RC}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \tag{1.12}$$

cu solutia:

$$Q_0 = -\frac{V_0 e^{t/RC}}{\omega\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}\cos(\omega t - \varphi) + \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}\cos\varphi \tag{1.13}$$

unde am folosit $tg\varphi = -\frac{1}{\omega RC}$ si conditia ca la $t = 0, \quad Q_0 = 0$.

In sfarsit, solutia generala a ecuatiei (1.8) este data de:

$$Q = \frac{CV_0}{1+\omega^2 R^2 C^2}\left[\frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sin\varphi} - ctg\varphi\, e^{-t/RC}\right] \tag{1.14}$$

Calculam si valoarea curentului i:

$$i = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 1/\omega^2 C^2}}\left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi\, e^{-t/RC}\right] \tag{1.15}$$

Cu definitia (1.6), din (1.8) rezulta urmatoarea valoare pentru frecventa de taiere:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \tag{1.16}$$

sau $\omega_c = 1/RC = 1/\tau$ unde τ este constanta de timp a circutului.

Sistemul de ordinul al doilea este un sistem care poate fi descris de o ecuatie diferntiala de ordinul al II-lea cu coeficienti constanti, scrisa sub forma:

$$a_2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t) \tag{1.17}$$

unde a_0, a_1 si a_2 sunt constante. Raspunsul in frecventa al acestui sistem poate fi reprezentat ca in Fig. 1.2 (c) si (d), unde:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \tag{1.18}$$

este numita *frecventa de rezonanta*, exprimata in unitati s^{-1} sau Hz si

$$h = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} \tag{1.19}$$

este numit *coeficientul de amortizare* (adimensional).

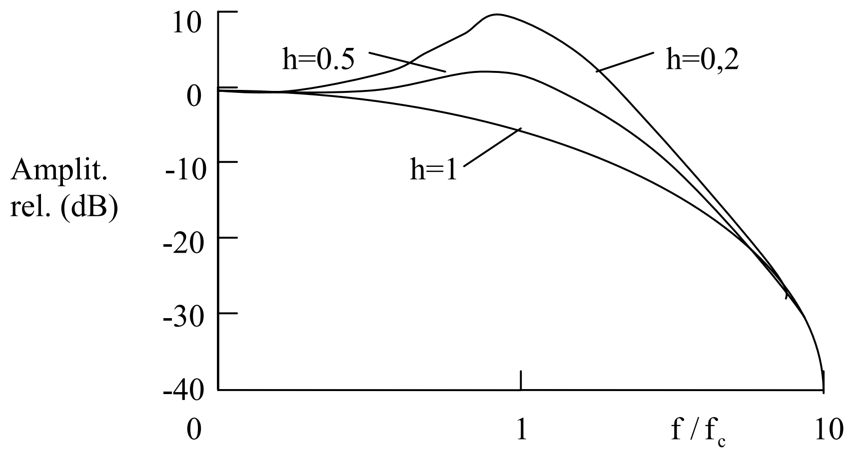


Fig. 1.2(c) Raspunsul in frecventa pentru sisteme liniare. Amplitudinea relativa pentru sisteme de ordinul al doilea.

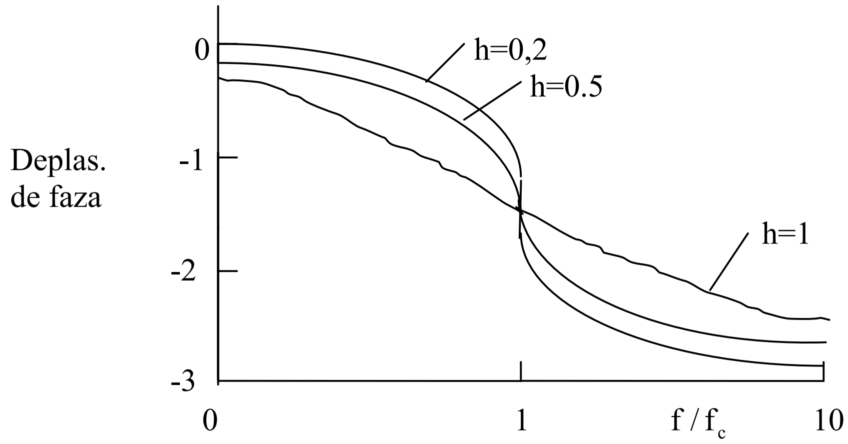


Fig. 1.2(d) Raspunsul in frecventa pentru sisteme liniare. Faza pentru sisteme de ordinul al doilea.

Un exemplu de sistem de ordinul al doilea il constiruie un circuit electric serie care contine un condensator de capacitate C, o bobina de inductanta L si un rezistor de rezistenta R alimentate de la o sursa de tensiune electrica $V = V_0 \sin \omega t$. Aplicand legile lui Kirchhoff, rezulta urmatoarea ecuatie pentru tensiuni:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{Q}{C}+Ri=V_0\sin\omega t \tag{1.20}$$

care cu definitia lui i se poate scrie in functie de marimea sarcinii Q:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V_0\sin\omega t \tag{1.21}$$

Stabilim mai intai solutia generala a ecuatiei omogene (1.21) cu o solutie de tipul $Q_g=Q_1^{'}e^{rt}$:

$$Lr^2Q_1^{'}e^{rt}+RrQ_1^{'}e^{rt}+\frac{Q_1^{'}}{C}e^{rt}=0$$

de unde:

$$r_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm j\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=-\delta\pm j\omega_\delta$$

unde $\delta=R/2L=a_1/2a_2$ este factorul de amortizare, $\omega_0=2\pi f_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ unde f_0 este frecventa de rezonanta iar

$$\omega_\delta=2\pi f_\delta=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2} \tag{1.22}$$

unde f_δ este frecventa naturala a circuitului. Rezulta astfel doua radacini pentru r. Aceste radacini pot fi reale si neegale, egale sau imaginare in functie de semnul discriminantului radicalului:

$$\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}=\begin{cases}>0\\=0\\<0\end{cases}$$

Primul caz corespunde unei miscari puternic amortizate, cel de-al doilea miscarii critic amortizate iar cel de-al treilea unei miscari slab amortizate (periodice) pentru care trebuie ca $R<2\sqrt{L\setminus C}$. Prelucrarea acestei inegalitati ne conduce la conditia $R^2C/4L<1$ care este legata de coeficientul de amortizare $h = RC/2\sqrt{LC} = 1/2\sqrt{R^2C/L} < 1$ ce corespunde la amortizare slaba de unde rezulta

$$h = \delta/\omega_0 \tag{1.23}$$

Solutia ecuatiei omogene devine:

$$Q_g = Ae^{\delta t}e^{j\omega_\delta t} + Be^{\delta t}e^{-j\omega_\delta t}$$

care impreuna cu conditiile initiale pentru $t = 0, \rightarrow Q_g = Q_0; i = i_0$ conduce la urmatorul rezultat:

$$Q_g = \frac{i_0 + Q_0\delta}{\omega_\delta}e^{-\delta t}\sin\omega_\delta t + Q_0e^{-\delta t}\cos\omega_\delta t \tag{1.24}$$

sau

$$Q_g = Q_1e^{-\delta t}\sin(\omega_\delta t + \phi) \tag{1.25}$$

care pentru i = 0 la t = 0, respecta coditiile initiale pentru ecuatia (1.24) modificata: $Q_g = \frac{Q_0\delta}{\omega_\delta}e^{-\delta t}\sin\omega_\delta t + Q_0e^{-\delta t}\cos\omega_\delta t = Q_0\frac{\sin(\omega_\delta t + \Phi)}{\sin\Phi}$,

unde $tg\Phi = \frac{\omega_\delta}{\delta}$, astfel:

$$t = 0 \quad \begin{cases} Q_g = Q_1\sin\Phi = Q_0 \\ i = i_0 = \omega_\delta Q_1\cos\Phi - \delta Q_1\sin\Phi = 0 \end{cases}$$

Solutia particaulara a ecuatiei neomogene (1.21) este de tipul:

$$Q_p = \frac{V_0\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}} \tag{1.26}$$

unde $\quad tg\varphi = \frac{R\omega}{(1/C - L\omega^2)}$ (1.27)

Solutia generala a ecuatiei (1.21) este data de insumarea ecuatiilor (1.24) si (1.26):

$$Q = Q_g + Q_p = Q_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_\delta t + \phi) + \frac{V_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}} \quad (1.28)$$

unde

$$\mathrm{tg}\phi = (1/2)\mathrm{tg}\varphi\big|_{\omega=\omega_\delta} = \omega_\delta / \delta; \quad \sin\phi = \omega_\delta / \omega_0; \quad \cos\phi = \delta / \omega_0. \quad (1.29)$$

1.2.3.3 Constanta de timp, raspunsul in timp, timpul de crestere si timpul de stabilizare.

Atunci cand semnalul de intrare al unui sistem se schimba brusc de la un nivel la altul, comportarea semnalului de iesire poate fi caracterizata de anumiti parametri specifici in concordanta cu tipul de sistem. Asemenea parametri sunt definiti ca un semnal de intrare unitate in care semnalul de intrare este zero inainte de anumit moment si este unitate dupa acel moment.

In sisteme de ordinul intai este definita *constanta de timp*. Asa cum se arata in Fig. 1.3(a), raspunsul unui sistem de ordinul intai la un semnal de intrare unitate este un proces care se apropie exponential de valoarea finala, si constanta de timp τ este definita ca timpul necesar pentru ca semnalul de iesire sa atinga $1 - 1/e \approx 0{,}673$ din valoaarea finala si este dat de raportul a_1 / a_0 pentru sistemul reprezentat de ecuatia (1.5).

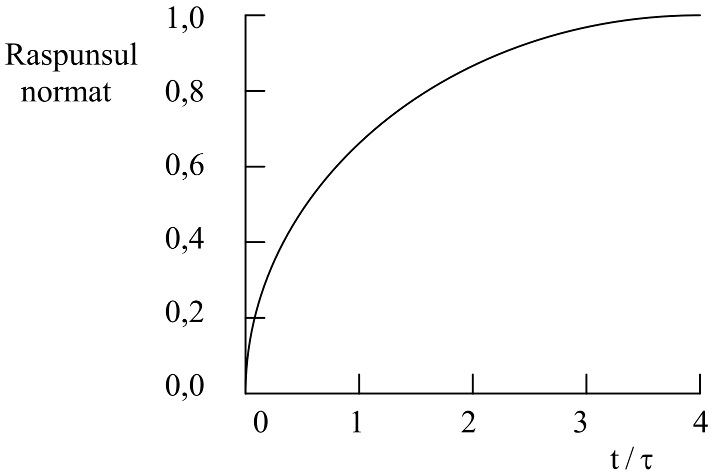


Fig. 1.3(a) Raspunsul la o functie treapta pentru sisteme de ordinul intai.

Un exemplu de sistem care sa se comporte ca un sistem de ordinul intai este un circuit electric serie format dintr-un condensator de capacitate C si un rezistor de rezistenta R alimentat de la o sursa de tensiune constanta V_0. Incarcarea condenasatorului poate fi descrisa de urmatoarea ecuatie diferentiala de ordinul intai:

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V_0 \tag{1.30}$$

Solutia acestei ecuatii cu conditiile initiale pentru $t=0 \rightarrow Q=0$ este:

$$Q=CV_0\left(1-e^{-t/RC}\right) \tag{1.31}$$

a carei reprezentare este de tipul celei prezentate in Fig. 1.3(a). Constanta de timp $\tau = RC$.

In sisteme de ordinul al doilea, raspunsul la un semnal de intrare treapta variaza in functie de coeficientul de amortizare asa cum aste aratat in Fig. 1.3(b).

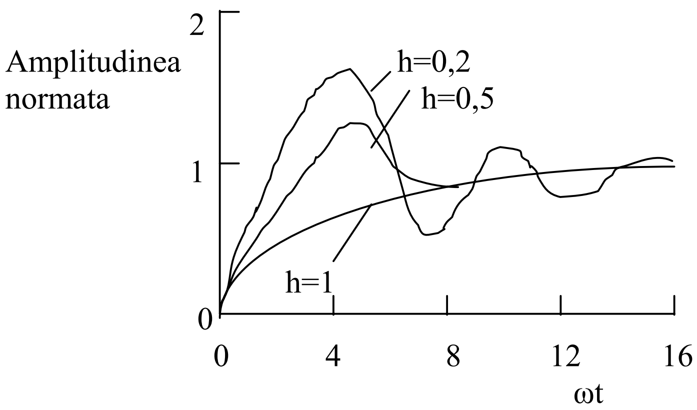


Fig. 1.3(b) Raspunsul la o functie treapta pentru sisteme de ordinul al doilea.

Exemplul il putem lua pentru circuitul serie format dintr-o bobina de inductanta L, un rezistor de rezistenta R si un condensator de capacitate C, alimentati de la o sursa de tensiune continua V_0. In acest caz ecuatia ce defineste incarcarea condensatorului este data de urmatoarea ecuatie diferentiala de ordinul doi:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V_0 \tag{1.32}$$

De data aceasta la solutia generala a ecuatiei omogene Q_g data de ecuatia (1.24) se adauga solutia particulara a ecuatiei neomogene (1.32):

$$Q_p=CV_0=Q_{max} \tag{1.33}$$

astfel incat solutia generala a ecuatiei (1.32) este:

$$Q=Q_1e^{-\delta t}\sin(\omega_\delta t+\Phi)+Q_{max} \tag{1.34}$$

Putem afla valoarea lui Q_1 din conditia ca la $t=0\rightarrow Q=0$ si astfel:

$$Q_1=-\frac{Q_{max}}{\sin\Phi} \tag{1.35}$$

In final marimea lui Q este data de:

$$Q=Q_{max}\left[1-\frac{e^{-\delta t}}{\sin\Phi}\sin(\omega_\delta t+\Phi)\right]=Q_{max}\left[1-\frac{\omega_0}{\omega_\delta}e^{-\delta t}\sin(\omega_\delta t+\Phi)\right] \tag{1.36}$$

Potrivit acestei solutii, valoarea constanta se obtine printr-o serie de oscilatii asa cum se arata in Fig. 1.3(b). Sa analizam partea dependenta de timp a solutiei (1.34):

$$Q=Q_1e^{-\delta t}\sin(\omega_\delta t+\Phi) \tag{1.37}$$

Sa calculam in acest caz valoarea modificarii sarcinii Q la momentele $t, t+T_\delta,...t+nT_\delta$ unde T_δ este dat de:

$$T_\delta=\frac{2\pi}{\omega_\delta} \tag{1.38}$$

Luand raportul valorilor lui Q corespunzatoare momentelor t si $t+nT_\delta$, obtinem:

$$\frac{Q_t}{Q_{t+nT_\delta}} = e^{n\delta T_\delta} \tag{1.39}$$

de unde:

$$\delta T_\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{Q_t}{Q_{t+nT_\delta}} \tag{1.40}$$

δT_δ se numeste decrement logaritmic. Sa stabilim pe aceasta cale valoarea coeficientului de amortizare relativ h (relatia (1.23)). Pentru $n = 1$,

$$\delta = \frac{1}{T_\delta}\ln\frac{Q_t}{Q_{t+T_\delta}} = \frac{\omega_\delta \ln Q_t / Q_{t+T_\delta}}{2\pi} \tag{1.41}$$

Astfel, prin prelucrarea relatiei (1.41):

$$\delta^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\omega_0^2 - \delta^2\right)\ln^2\frac{Q_t}{Q_{t+T_\delta}}$$

rezulta:

$$h = \frac{\delta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\ln^2 Q_t / Q_{t+T_\delta}}{4\pi^2 + \ln^2 Q_t / Q_{t+T_\delta}}} \tag{1.42}$$

si

$$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - h^2} \tag{1.43}$$

Unii parametri sunt folositi pentru a exprima cat de rapid urmareste sistemul semnalul de intrare. *Raspunsul in timp* este definit de obicei ca timpul in care este atinsa 90% din valoarea finala si *timpul de crestere* este definit ca timpul in care semnalul de iesire se schimba de la 10 la 90% din valoarea finala la un semnal de intrare treapta. *Timpul de stabilizare este* definit ca timpul necesar ca semnalul de iesire sa se stabilizeze intr-un anumit domeniu apropiat de valoarea finala; de exemplu, domeniul este definit ca fiind de $\pm 5\%$ din valoarea finala la un semnal de intrare unitate.