EXERCITII: QUBITI/TRANSFORMARI UNITARE

1) Care dintre starile de mai jos reprezinta un qubit?

a) $2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$
b) $(3^{1/2}/2)|1\rangle - (1/2)|0\rangle$
c) $0.7|0\rangle + 0.3|1\rangle$
d) $0.8|0\rangle + 0.6|1\rangle$
e) $\cos\theta|0\rangle + i\sin\theta|1\rangle$
f) $\cos^2\theta|0\rangle - \sin^2\theta|1\rangle$

Pentru fiecare dintre starile corecte, sa se calculeze probabilitatea de observare a starii $|0\rangle$ sau $|1\rangle$ cand sistemul este masurat in baza $\{|0\rangle,|1\rangle\}$. Care este probabilitatea de observare a starilor bazei daca masuratoarea se efectueaza in baza $\{(3^{1/2}/2)|0\rangle + (1/2)|1\rangle,(1/2)|0\rangle - (3^{1/2}/2)|1\rangle\}$? Este aceasta o baza valida?

2) Aratati ca $|+\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$ si $|-\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle)$ este o baza de calcul (numita baza Hadamard), adica aratati ca cele doua stari sunt ortogonale.

3) Se defineste baza de masura cu starile
$|+\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$, $|-\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle)$.
Pentru urmatoarele stari cuantice,

a) $a|+\rangle + b|-\rangle$
b) $|0\rangle$
c) $|1\rangle$
d) $a|0\rangle + b|1\rangle$

care este probabilitatea ca in urma masuratorii sa se obtina $|+\rangle$? Dar sa se obtina $|-\rangle$ in urma masuratorii?

4) Pentru $|q\rangle = (3/5)|0\rangle + (4/5)|1\rangle$, exista o stare ortogonala $|q'\rangle$ astfel incat
$|EPR\rangle = 2^{-1/2}(|00\rangle + |11\rangle) = (|q,q\rangle + |q',q'\rangle)$?
Dar pentru starea $|q\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle + i|1\rangle)$?

5) Avand o stare $|q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ si starea ortogonala duala $|q'\rangle = b^*|0\rangle - a^*|1\rangle$, definiti o state $|s\rangle$ si starea ortogonala corespunzatoare $|s'\rangle$, astfel incat
$|EPR\rangle = 2^{-1/2}(|q,s\rangle + |q',s'\rangle)$

6a) Un sistem de doi qubiti este preparat in una din starile

a) $|\psi\rangle = (1/3)|00\rangle + (2/3)|10\rangle - (2/3)|11\rangle$
b) $|\psi\rangle = (i/2)|00\rangle - 3^{-1/2}|10\rangle + (1/2)|01\rangle + i6^{-1/2}|11\rangle$
c) $|\psi\rangle = 2^{-1/2}(|00\rangle + |11\rangle)$

Care este probabilitatea sa obtin 0 daca masor primul qubit? Dar probabilitatea sa obtin 1?
In fiecare caz, calculati starea sistemului in urma masuratorii si determinati posibilitatea ca o masuratoare ulterioara asupra celui de-al doilea qubit sa dea ca rezultat 0 sau 1.
6b) Aceeasi problema, dar in baza $\{2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle),2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle)\}$?

7) Verificati ca starea 3-qubit
$|\psi\rangle = (i/2)|000\rangle + [(12 + 5i)/26]|001\rangle - (1/2)|101\rangle + (3/10)|110\rangle - (4i/10)|111\rangle$
este normalizata. Calculati probabilitatea si starea post-masuratoare pentru ca:

a) masuratoarea asupra primului qubit sa dea 0
b) masuratoarea asupra primului qubit sa dea 1
c) masuratoarea asupra ultimilor doi qubiti sa dea 00
d) masuratoarea asupra ultimilor doi qubiti sa dea 01
e) masuratoarea asupra qubitilor sa dea 010

8) Poate starea $2^{-1/2}(|000\rangle + |111\rangle)$ sa fie scrisa ca un produs de stari 1-qubit? Justificati.
Daca ultimul qubit este scos din sistem (eliminat), starea finala este sau nu $2^{-1/2}(|00\rangle + |11\rangle)$? Justificati.

9) Aratati care dintre starile de mai jos nu se poate scrie ca un produs de stari 1-qubit:

a) $(1/2)(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)$
b) $3^{-1/2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$
c) $(1/2)(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$

10) Pornind de la faptul ca starile $2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$ si $2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle)$ pot fi perfect distinse aplicand o transformare Hadamard inaintea masuratorii, sa se gaseasca transformarea care trebuie aplicata urmatoarelor stari, inaintea masuratorii, pentru a putea fi distinse fara eroare (perfect):

a) $(3^{1/2}/2)|0\rangle + (1/2)|1\rangle$ si $(1/2)|0\rangle - (3^{1/2}/2)|1\rangle$
b) $2^{-1/2}(|0\rangle + i|1\rangle)$ si $2^{-1/2}(i|0\rangle + |1\rangle)$
c) $|0\rangle$ si $2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$

<u>Observatie</u>: Aratati in primul rand ca transformarea Hadamard, definita ca $U_H = 2^{-1/2}(\sigma_x + \sigma_z)$, poate distinge starile $2^{-1/2}(|0\rangle + |1\rangle)$ si $2^{-1/2}(|0\rangle - |1\rangle)$ inaintea masuratorii, calculand efectul acestei transformari asupra starilor date.

11) Fie doi qubiti ortogonali $|\psi_0\rangle = a_0|0\rangle + b_0|1\rangle$, $|\psi_1\rangle = a_1|0\rangle + b_1|1\rangle$. Gasiti o poarta descrisa printr-o matrice unitara care, aplicata lui $|\psi_i\rangle$ sa dea, cu certitudine, valoarea i.

12) Gasiti o transformare 1-qubit U astfel incat
$(U\otimes U)(2^{-1/2}|00\rangle + 2^{-1/2}|11\rangle) = 2^{-1/2}(|01\rangle + |10\rangle)$

13) Care este rezultatul aplicarii operatiei A_4: $|x\rangle \rightarrow |(x+1)\mathrm{mod}4\rangle$ asupra starii
$|\psi\rangle = (1/2)(|0\rangle - i|1\rangle - |2\rangle + i|3\rangle)$?
Dar rezultatul aplicarii operatiei $A_4^m = \underbrace{A_4 \cdot A_4 \cdot \ldots \cdot A_4}_{m \text{ ori}}$?

14) Care este rezultatul aplicarii operatiei A_n: $|x\rangle \rightarrow |(x+1)\mathrm{mod}n\rangle$ asupra starii

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\exp(-2\pi i j/n)\,|\,j\rangle\ ?$$

Dar rezultatul aplicarii operatiei $A_n^m = \underbrace{A_n \cdot A_n \cdot \ldots \cdot A_n}_{m \text{ ori}}$?

EXERCITII: PORTI LOGICE CUANTICE

1) Demonstrati identitatile

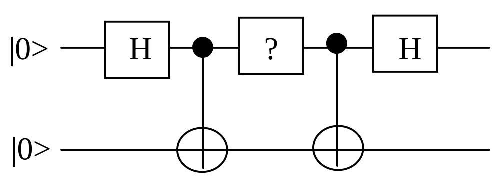
HXH = Z,   HZH = X,

unde H este poarta Hadamard, iar X, Z sunt portile care implementeaza matricile Pauli σ_x, σ_z.

2) Fie
$|a\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle+|1\rangle)$, $|b\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle+\exp(i\pi/3)|1\rangle)$.
Calculati

a) $|a\rangle\otimes|b\rangle$
b) $\mathrm{CNOT}|a\rangle|b\rangle$
c) $\mathrm{H}|a\rangle$, $\mathrm{H}|b\rangle$, $\mathrm{X}|b\rangle$
d) $\mathrm{H}|a\rangle\otimes\mathrm{X}|b\rangle$
e) matricile operatorilor H⊗X, X⊗H
f) aratati ca $(\mathrm{H}\otimes\mathrm{X})|a\rangle|b\rangle = (\mathrm{H}|a\rangle)\otimes(\mathrm{X}|b\rangle)$

3) In circuitul



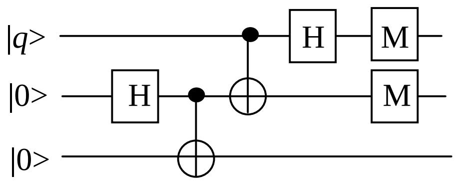
? poate fi oricare dintre matricile {I, X, Y, Z} cu X, Y, Z matricile Pauli. Calculati starea sistemului la iesire pentru fiecare matrice ? posibila.

4) Care este rezultatul aplicarii operatorilor

a) H⊗H⊗H
b) H⊗H⊗I

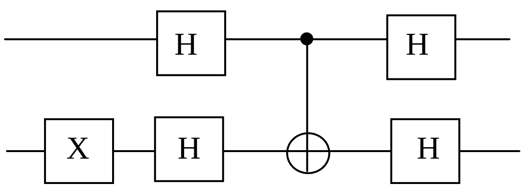
asupra unei stari arbitrare 3-qubit?

5) Fie circuitul

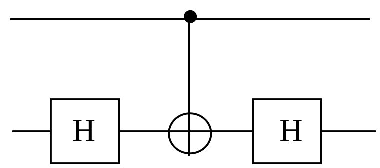


Care este rezultatul aplicarii acestui circuit asupra starii de intrare $|q\rangle = a|0\rangle+b|1\rangle$, inainte de a face masuratorile reprezentate prin portile M?
Care este probabilitatea de a obtine in urma masurarii primilor doi qubiti rezultatul 00? Care este starea cuantica a celui de-al treilea qubit dupa aceasta masuratoare?
Analog pentru rezultatul 01, 10 sau 11 obtinut la masurarea primilor doi qubiti.

6) Analizati efectul circuitelor de mai jos asupra starilor din baza $\{0,1\}^n$. Calculati matricea unitara $2^n\times2^n$ a acestor circuite.

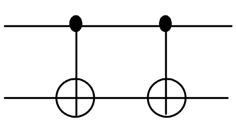


(a)

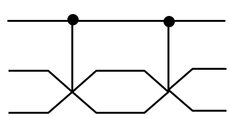


(b)

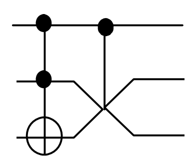
7) Gasiti matricea care descrie functionarea urmatoarelor circuite:



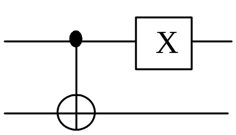
(a)



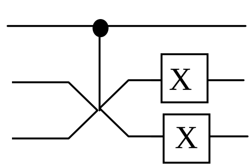
(b)



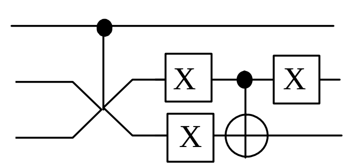
(c)



(d)



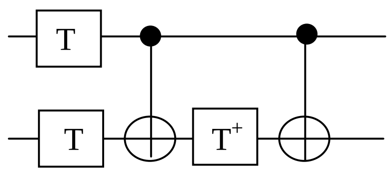
(e)



(f)

Verificati ca matricile sunt unitare.

8) Gasiti matricea circuitului



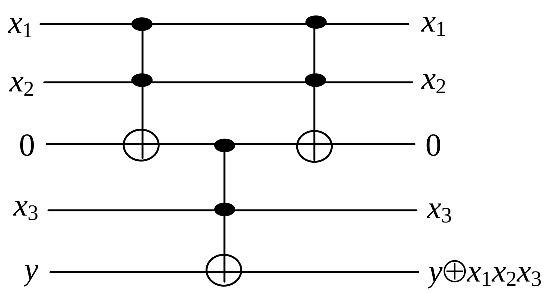
unde indicele superior + indica operatia de conjugare complexa si transpozitie, si

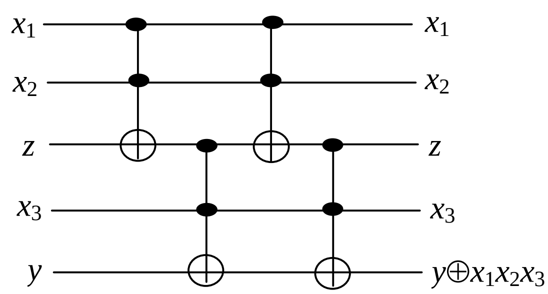
$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \exp(i\pi/4)\end{pmatrix}.$$

9) Ce operatie in baza de calcul $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ corespunde operatiei CNOT aplicata in baza Hadamard $\{2^{-1/2}(|0\rangle+|1\rangle),2^{-1/2}(|0\rangle-|1\rangle)\}$? Analog, ce operatie corespunde operatiei CZ (control-Z) cu matricea

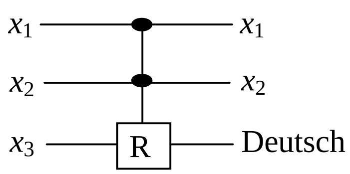
$$\mathrm{CZ}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}?$$

10) Sa se arate ca poarta Toffoli CCNOT cu 2 biti de control poate fi generalizata la CCCNOT (cu trei biti de control) cu ajutorul circuitelor de mai jos. (Acest exemplu este inversul celui studiat la cursul de porti logice cuantice, in care poarta Toffoli cu doi biti de control a fost simplificata, in sensul descompunerii intr-o succesiune de porti logice cu un singur bit de control.)

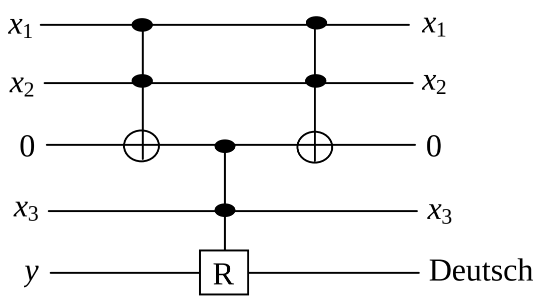




Analog, sa se arate ca operatorul 3-qubit CCROT (sau poarta Deutsch), care roteste bitul 3 daca bitii 1 si 2 au valoarea 1, si definit ca



poate fi generalizat la poarta CCCROT cu ajutorul circuitului din figura de mai jos. Poarta $R = -iR_x(\theta) = (-i)\exp[i(\theta/2)\sigma_x] = (-i)[I_2 \cos(\theta/2) + i\sigma_x \sin(\theta/2)]$, cu I_2 operatorul unitate bidimensional, reprezinta, pana la un factor de faza, o rotatie cu unghi θ in jurul axei x, cu θ incomensurabil cu π. Analog, poarta 4-qubit Deutsch roteste qubitul y daca bitii x_1, x_2 si x_3 sunt 1.



EXERCITII: ALGORITMI CUANTICI

1) Aplicati algoritmul Grover pe un sistem cu $N = 4$ si $x_0 = 0$. Starea initiala este $|\psi\rangle = (|0\rangle+|1\rangle+|2\rangle+|3\rangle)/2$.

EXERCITII: TELEPORTARE

1) Operatia de teleportare este un operator de deplasare generalizata, de tipul
$U|\psi\rangle|0\rangle = |0\rangle|\psi\rangle$.
Aratati ca, daca pot defini U astfel incat
$U|\psi_1\rangle|0\rangle = |0\rangle|\psi_1\rangle$ si $U|\psi_2\rangle|0\rangle = |0\rangle|\psi_2\rangle$,
atunci operatorul U poate translata o stare generala $|\psi\rangle = a_1|\psi_1\rangle+a_2|\psi_2\rangle$.

2) Gasiti matricea care caracterizeaza operatia de deplasare generalizata de mai sus pe un sistem 2-qubit.

EXERCITII: CRIPTOGRAFIE CUANTICA

1) Fie exemplul de protocol BB84: Alice genereaza intai un sir aleator de biti:
HSHSHSSSHSSHSHHH,

dupa care il codeaza ca sir de qubiti conform protocolului BB84 (qubitii in baza H se noteaza cu + si –, iar cei in baza S cu 0 si 1). Care dintre urmatoarele siruri este sirul de qubiti corect:

a) +1–0–110+00–0+–+
b) 1–+0+0—10–1–++1
c) 0–+–+1–1+1–0–00+

Ulterior, Alice ii trimite sirul lui Bob, care il masoara in baza
HHSSSHHSHSSHHSSH
Alice si Bob anunta apoi public baza lor de masura, si retin qubitii pentru care ei aleg aceeasi baza. Care este sirul de qubiti pe care il retin?

2) Daca in problema de mai sus, Eva intercepteaza cheia de transmisie masurand-o in baza
HSHHHSHSHSHSSSHH,
care dintre bitii transmisi este corupt/modificat de catre Eva prin interceptare?

EXERCITII: METODE DE CORECTARE A ERORILOR

Un exemplu de aflare a valorilor unor qubiti fara ca acestia sa fie masurati este exercitiul urmator: ce se poate spune despre qubitii $a, a', a'' \in \{0,1\}$ in circuitul 5-qubit de mai jos daca rezultatul aplicarii celor doua porti de masura este 1, respectiv 1? Dar daca rezultatul este 1, 0, sau 0, 1, sau 0, 0?