

## Derivarea legii Ohm din formula conductantei balistice

Formula Landauer incorporeaza proprietatile rezistentei conductorilor mezoscopici:

- rezistenta de contact este independenta de lungime,
- apar trepte in  $G$  legate de modurile transversale in conductorii ingusti.

Vrem sa aratam ca pentru conductori largi se obtine totusi legea lui Ohm. Intr-un conductor larg, numarul modurilor este proportional cu  $W$ :  $M \cong k_F W / \pi$ , si deci

$$G = e^2 W \rho_0 (v_F T / \pi)$$

Pentru un conductor de lungime  $L$  mare se poate arata (vezi mai jos) ca probabilitatea de transmisie este data de

$$T = \frac{L_0}{L + L_0},$$

unde  $L_0$  este o lungime caracteristica de ordinul drumului liber mediu. In aceste conditii

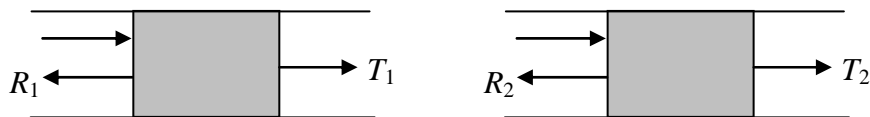
$$G = \frac{W}{L + L_0} e^2 \rho_0 \frac{v_F L_0}{\pi} = \frac{\sigma W}{L + L_0}$$

(unde am identificat coeficientul de difuzie  $D = v_F L_0 / \pi = \sigma / e^2 \rho_0$ ) si

$$R = G^{-1} = \frac{L + L_0}{\sigma W} = R_s \left( = \frac{L}{\sigma W} \right) + R_c \left( \frac{L_0}{\sigma W} \right)$$

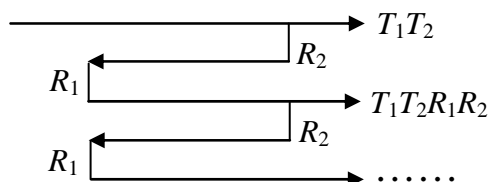
unde  $R_s$  satisface legea lui Ohm (adica este proportionala cu lungimea), si  $R_c$  este rezistenta de contact ; in conductorii macroscopici  $R_s \gg R_c$ .

Demonstratie ca  $T = \frac{L_0}{L + L_0}$ .



Sa consideram doi conductori/centre de imprastiere, cu probabilitati de transmisie  $T_1$  si  $T_2$  in serie, ca in figura de mai sus. Probabilitatea de transmisie total este data de  $T_{tot} = T_1 T_2$  doar daca se neglijeaza reflexiile multiple intre conductori. In cazul nostru  $T_{tot} \neq T_1 T_2$ .

Daca  $L_{rf}$  este mai mica decat distanta intre centrele de imprastiere (situatie opusa cu cea considerata la tunelarea rezonanta!) probabilitatea totala de transmisie se obtine sumand probabilitatile de transmisie cu zero reflexii, cu 2 reflexii, 4 reflexii, etc. (vezi figura de mai jos). Presupunem de asemenea ca probabilitatea de transmisie si reflexie este independenta de sensul de incidenta al electronilor.



In acest caz,

$$T_{tot} = T_1 T_2 + T_1 T_2 R_1 R_2 + T_1 T_2 R_1^2 R_2^2 + \dots = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}.$$

Deoarece  $T_1 = 1 - R_1$ ,  $T_2 = 1 - R_2$ , formula de mai sus se scrie (vezi discutia referitoare la formula Landauer)

$$\frac{1 - T_{tot}}{T_{tot}} = \frac{1 - T_1}{T_1} + \frac{1 - T_2}{T_2}$$

sau, pentru  $N$  centre de imprastiere in serie cu probabilitatea de transmisie  $T$ ,

$$\frac{1-T_{tot}}{T_{tot}} = N \frac{1-T}{T} \quad \rightarrow \quad T_{tot} = \frac{T}{N(1-T)+T}.$$

Daca numarul centrilor de imprastiere  $N = \nu L$ , cu  $\nu$  densitatea liniara a centrilor de imprastiere,

$$T_{tot} = \frac{L_0}{L + L_0}, \quad \text{cu} \quad L_0 = \frac{T}{\nu(1-T)}.$$

Deoarece coeficientul de transmisie este de ordinul unitatii (fara a fi insa egal cu 1 deoarece nu consider interferente intre undele care se reflecta din centrele de imprastiere, si deci nu am tunelare rezonanta) rezulta ca  $L_0 \cong 1/\nu$ . In concluzie  $L_0$  este de ordinul drumului liber mediu pe care un electron il parcurge inainte de imprastiere, deoarece, conform definitiei  $L_{lm} \cong 1/\nu$ .

Observatie: formula de sumare peste coeficientii de transmisie partiali la imprastierea pe doi centri presupune ca cei doi centri de imprastiere sunt necorelati in faza/independenti. In cazul in care ar fi fost corelati, am fi obtinut formula pentru transmisia rezonanta.

## Formula Büttiker pentru masuratori cu patru terminale

Masuratori cu patru terminale se folosesc in special pentru studierea proprietatilor structurilor mezoscopice in camp magnetic. Formula Büttiker se scrie in general ca

$$I_p = \frac{2e^2}{h} \sum_q [\bar{T}_{qp} V_p - \bar{T}_{pq} V_q] = \sum_q [G_{qp} V_p - G_{pq} V_q]$$

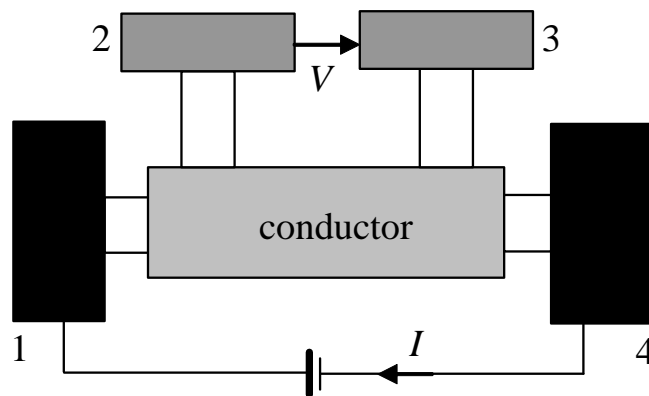
Punand conditia ca sa nu am curent cand toate potentialele sunt egale, obtinem relatia

$$\sum_q G_{qp} = \sum_q G_{pq}, \text{ astfel incat formula Büttiker se mai poate scrie si ca}$$

$$I_p = \sum_q G_{pq} [V_p - V_q].$$

La schimbarea sensului campului magnetic avem  $[G_{qp}]_{+B} = [G_{pq}]_{-B}$ .

Sa consideram structura de mai jos, cu patru terminale, in care curentul este masurat intre terminalele 1 si 4 si tensiunea intre terminalele 2 si 3. Sa presupunem ca potentialul terminalului 4, de exemplu, este nul, adica  $V_4 = 0$ .



In sistemul de mai sus, matricea conductantei este

$$G_{pq} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix}$$

si particularizand a doua forma a relatiei Büttiker obtinem

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{12} + G_{13} + G_{14} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{21} + G_{23} + G_{24} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{31} + G_{32} + G_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}.$$

Curentul in al patrulea terminal se obtine din

$$I_4 = -(I_1 + I_2 + I_3)$$

adica din conditia ca sa nu existe curent net prin conductor.

Rezistenta masurata in aceasta configuratie este

$$R_{4t} = \frac{V}{I} = \left( \frac{V_2 - V_3}{I_1} \right)_{I_2=I_3=0} = R_{21} - R_{31},$$

unde

$$[R] = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{12} + G_{13} + G_{14} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{21} + G_{23} + G_{24} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{31} + G_{32} + G_{34} \end{pmatrix}^{-1}$$

$R_{4t}$  este legata de componenta  $\rho_{xx}$  a tensorului rezistivitatii care (din considerente termodinamice) trebuie sa fie simetrica la inversarea campului magnetic, adica  $\rho_{xx}(B) = \rho_{xx}(-B)$ , ceea ce implica  $R_{4t}(B) = R_{4t}(-B)$ . Aceasta relatie este valabila la scara macroscopica.

Dar experimentele arata ca  $R_{4t}$  in conductori mezoscopici fluctueaza aleator ca functie de componenta perpendiculara pe planul conductorului a campului magnetic datorita interferentelor arbitrare intre centre de imprastiere multiple. Aceste fluctuatii nu au o simetrie

particulara in campul magnetic, deci in general  $R_{4t}(B) \neq R_{4t}(-B)$ . Explicatia acestui fenomen este ca, la scara mezoscopica, curentul este neregulat, nu curge de-a lungul directiei  $x$  sau  $y$  datorita imprastierilor (chiar si in conductori balistici, electronii sunt imprastiati de marginile conductorului). In consecinta,  $R_{4t}$  este o medie intre componentele  $\rho_{xx}$  si  $\rho_{xy}$ . Deoarece  $\rho_{xy}$  este antisimetric in campul magnetic, adica  $\rho_{xy}(B) = \rho_{xy}(-B)$ , pe cand  $\rho_{xx}$  este simetric,  $\rho_{xx}(B) = \rho_{xx}(-B)$ ,  $R_{4t}$  nu are nici o simetrie la schimbarea sensului campului magnetic.

Conditia de reciprocitate  $R_{4t}(B) = R_{4t}(-B)$  in cazul mezoscopic se exprima astfel: deoarece  $[G_{qp}]_{+B} = [G_{pq}]_{-B}$ , rezulta ca

$$[R^{-1}]_{+B} = [R^{-1}]_{-B}^T$$

(daca  $B$  se inverseaza, inversa matricii  $[R]$  se transpune!). Totusi elementele diagonale ale  $[R]^{-1}$  raman neschimbate deoarece, din

$$\sum_q [G_{pq}]_{+B} = \sum_q [G_{qp}]_{+B} = \sum_q [G_{pq}]_{-B}$$

si din  $G_{pp}(B) = G_{pp}(-B)$ , rezulta ca

$$\sum_{q \neq p} [G_{pq}]_{+B} = \sum_{q \neq p} [G_{pq}]_{-B}$$

In consecinta, elementele diagonale ale  $[R]^{-1}$  raman aceleasi.

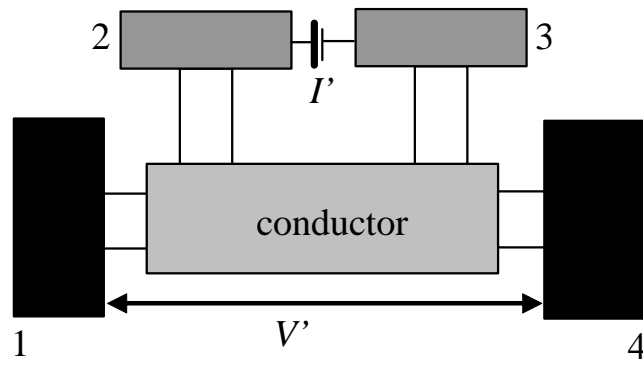
Deoarece  $[R^{-1}]^T = [R^T]^{-1}$ , rezulta ca  $[R]_{+B} = [R]_{-B}^T$ , adica

$$[R_{31}]_B = [R_{13}]_{-B}, \quad [R_{21}]_B = [R_{12}]_{-B},$$

si deci

$$R_{4t}(B) = R_{4t}'(-B)$$

unde  $R_{4t}'$  corespunde rezistentei masurate in alt set-up, cel din figura de mai jos.

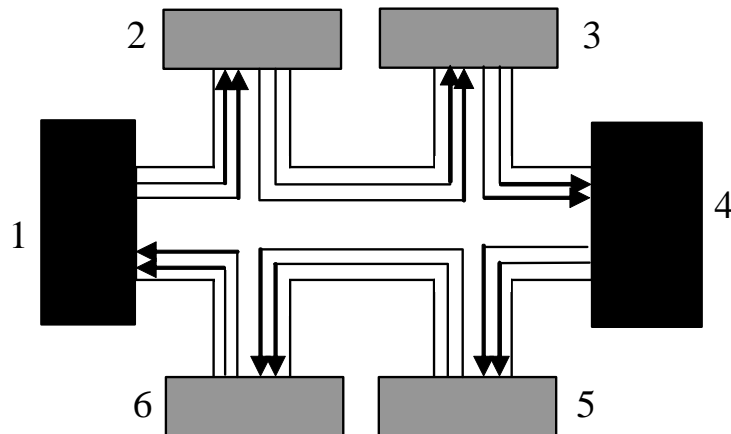


In acest sistem,

$$R_{4t}' = \frac{V'}{I'} = \left( \frac{V_1}{I_2} \right)_{I_1=0, I_2=-I_3} = R_{12} - R_{13}$$

## Efectul Hall in nanofire cuantice

Pentru a masura rezistenta Hall in campuri magnetice mari, in care se formeaza stari de margine si in care acestea au o contributie dominanta, se foloseste puntea Hall de mai jos (sagetile indica stările de margine si sensul de miscare al electronilor transportati de acestea).



In acest caz, matricea conductantei are doar cateva elemente nenule, electronii propagandu-se strict intre doua terminale adiacente, ca si in cazul clasic, in care traiectoria medie este intre terminalele intre care se aplica o diferenta de potential. Mai precis,

$$G_{pq} = \begin{pmatrix} q=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_c \\ G_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_c & 0 \end{pmatrix} & p=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

cu  $G_c = 2e^2 M / h$ , si  $M$  numarul starilor de margine.

Daca  $V_4 = 0$ , formula Büttiker

$$I_p = \sum_q G_{pq} [V_p - V_q]$$



unde  $G_{pq}$  este conductanta asociata electronilor care se propaga din terminalul  $q$  in  $p$ , da

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_c & 0 & 0 & 0 & -G_c \\ -G_c & G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_c & G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_c & G_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}.$$

Si in acest caz curentul prin terminalul 4 este dat de

$$I_4 = -(I_1 + I_2 + I_3 + I_5 + I_6).$$

Pentru  $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$ , rezulta ca  $V_2 = V_3 = V_1$  si  $V_5 = V_6 = 0$ , deci  $I_1 = G_c V_1$  si rezistenta longitudinala masurata intre probele 2 si 3 sau 5 si 6 este

$$R_L = \frac{V_2 - V_3}{I_1} = \frac{V_6 - V_5}{I_1} = 0.$$

Similar, rezistenta Hall masurata intre contactele 2 si 6 sau 3 si 5 este data de

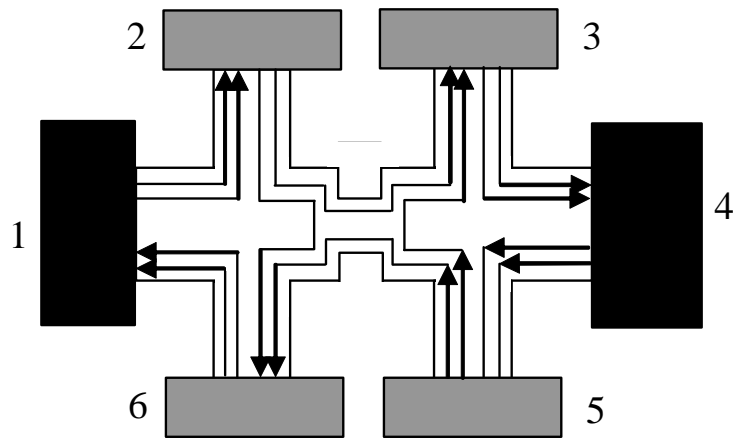
$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_3 - V_5}{I_1} = G_c^{-1}.$$

Deci, rezistenta Hall este cuantificata.

Sa presupunem acum ca exista imprastiere inapoi (backscattering) in dispozitivul de mai sus. In acest caz, transmisia fiecarei stari de margine nu mai este 100%! Concret, presupunem ca doar  $N$  ( $N < M$ ) canale/stari de margine se pot propaga prin constrictia introdusa intre probele 2 si 3 in puntea Hall, astfel incat un numar  $N - M$  de canale sunt imprastiate inapoi. Dispozitivul de masura cu constrictii este ilustrat in figura de mai jos.

In acest caz,

$$I_1 = \frac{2e}{h} N(E_{F1} - E_{F4}) = \frac{2e^2}{h} N V_1 = \frac{2e^2}{h} M V_1 (1 - p),$$



unde

$$p = \frac{M - N}{M} = \frac{\text{numarul canalelor imprastiate inapoi}}{\text{numarul total de canale}}$$

Aplicand formalismul Büttiker pentru  $V_4 = 0$ , obtinem

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_c & 0 & 0 & 0 & -G_c \\ -G_c & G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-p)G_c & G_c & -pG_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_c & 0 \\ 0 & -pG_c & 0 & -(1-p)G_c & G_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix}$$

deoarece matricea conductivitatii devine

$$G_{pq} = \begin{pmatrix} q=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_c \\ G_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)G_c & 0 & 0 & pG_c & 0 \\ 0 & 0 & G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_c & 0 & 0 \\ 0 & pG_c & 0 & 0 & (1-p)G_c & 0 \end{pmatrix} \quad p=1$$

Daca  $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$ , obtin  $V_2 = V_1$ ,  $V_5 = 0$ ,  $V_3 = (1-p)V_1$ ,  $V_6 = pV_1$ , si  $I_1 = G_c(1-p)V_1$ , astfel incat

$$R_L = \frac{V_2 - V_3}{I_1} = \frac{V_6 - V_5}{I_1} = \frac{V_1 p}{I_1} = \frac{p}{1-p} \frac{1}{G_c} = \frac{h}{2e^2} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right).$$

Se observa cuantificarea “fractionala” a rezistentei longitudinale, efect observat experimental. Pe de alta parte, rezistenta Hall intre 2 si 6 sau 3 si 5 este neschimbata:

$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_3 - V_5}{I_1} = (1-p) \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{G_c}.$$

Acelasi rezultat se poate obtine si daca consideram ca contactul 2 vede doar canalele originare din stanga, cu potential  $E_{F1}$  (presupus =  $eV_1$ ), si contactul 5 vede doar cele care vin din dreapta, cu potential  $E_{F4}$  (presupus = 0). Rezulta deci ca  $E_{F2} = eV_1$  si  $E_{F5} = 0$ .

Similar, contactul 6 vede  $M - N$  canale din stanga, cu potential  $E_{F1}$  si  $N$  canale din dreapta, cu  $E_{F4}$ , si

$$E_{F6} = \frac{(M - N)E_{F1} + NE_{F4}}{M} = eV_1 p,$$

si, analog,

$$E_{F3} = \frac{NE_{F1} + (M - N)E_{F4}}{M} = eV_1(1-p).$$

In consecinta, rezistenta longitudinalala intre 2 si 3 sau 5 si 6 este

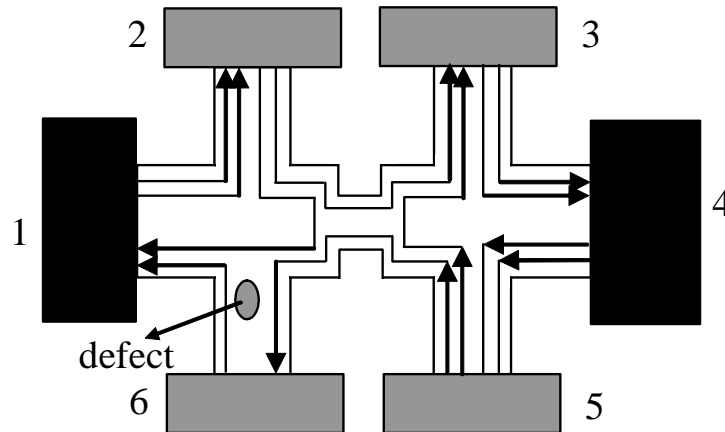
$$R_L = \frac{V_1 p}{I_1} = \frac{h}{2e^2 M} \frac{p}{1-p} = \frac{h}{2e^2} \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right).$$

$$R_H = \frac{V_1(1-p)}{I_1} = \frac{h}{2e^2 M}.$$

Faptul ca rezistenta Hall nu este afectata de constrictie nu este adevarat intotdeauna. Daca presupun ca nu exista legatura intre starile de margine de aceeași parte a probei și ca exista defecte/impuritati la contactul 6, de exemplu, astfel incat contactul 6 vede doar starile langa margine (celelalte ocolesc defectul și se duc direct la contactul 1), atunci  $E_{F6} \cong E_{F4} = 0$ . In acest caz,

$$R_H = \frac{V_2 - V_6}{I_1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{h}{2e^2 M} \frac{1}{1-p}$$

in loc de  $\frac{h}{2e^2 M}$ .



Daca starile de margine de pe aceeași parte a structurii ar fi fost influentate una de alta, ar fi avut tendinta de a ajunge la un echilibru și ar fi ajuns la un potential mediu de  $eV_1(1-p)$ . Atunci, chiar daca contactul 6 vede doar o singura stare de margine, el ar simți potentialul mediu, astfel incat rezistenta Hall ar fi independenta de  $p$ .

Daca  $R_H$  este afectata de constrictie (de exemplu, o poarta dubla laterala/split gate), inseamna ca nu exista echilibru intre starile de margine de pe aceeași parte a probei. Starile de margine de pe aceeași parte a probei se pot propaga pe distante mari (de pana la 1 mm) fara echilibrare.